Fixpunktmengen gewisser $\mathbf{Z_2}$-Operationen

Clara Strohm (strohm@fmi.uni-konstanz.de)

19. Juli 2001

Die Fixpunktmengen linearer Abbildungen von (endlichdimensionalen) euklidischen Räumen bzw. Sphären sind wieder isomorph zu euklidischen Räumen bzw. Sphären (gleicher oder kleinerer Dimension).
Wir werden ein analoges Resultat – auf Ebene der Kohomologie mit geeigneten Koeffizienten – für topologische Operationen der Gruppe $\mathbf{Z_2}$ auf endlichdimensionalen $\mathbf{Z_2}$-CW-Komplexen herleiten.

1 Bezeichnungen

Im folgenden bezeichnen wir mit G die Gruppe $\mathbf{Z_2}$, und schreiben diese Gruppe multiplikativ. Dabei sei 1_G das neutrale, und g das erzeugende Element von G.
Weiter sei k ein Körper mit Charakteristik 2. Ist $\alpha \in k$, so schreiben wir k_α für die $k[T]$-Algebra, deren Struktur durch den Einsetzhomomorphismus $k[T] \longrightarrow k_\alpha$ mit

$$T \mapsto \alpha$$

gegeben ist.
Ist X ein G-CW-Komplex, so sei X^G die Fixpunktmenge bezüglich der (topologischen) G-Operation, d. h.

$$X^G = \{x \in X \mid \forall_{a \in G} \quad ax = x\}.$$

Weiter steht $S^*(X;k)$ für den singulären Kokettenkomplex von X mit Koeffizienten in k. Ist A^* ein k-Modul-Kokettenkomplex, so schreiben wir $A^{(*)}$ für die direkte Summe der entsprechenden Moduln, d. h. für das – nicht graduierte – Objekt in δk-Mod.

2 Das verdrehte Tensorprodukt

Sei X ein G-Raum. Dann schreiben wir

$$\mathcal{B}^*_G(X;k) := \mathcal{B}^*_G(S^*(X;k);k) := \big(S^*(X;k) \ \otimes_k k[T], \widetilde{\delta}\big)$$

für die algebraische Borelkonstruktion, wobei der Modul $k[T]$ via $\deg T = 1$ graduiert ist. Dabei wird der $k[T]$-lineare Korand $\widetilde{\delta}$ durch

$$\forall_{c \in S^*(X;k)} \quad \widetilde{\delta}(c \otimes_k 1) = (\delta c) \otimes_k 1 + c \cdot (1_G + g) \otimes_k T$$

gegeben, wenn δ der Korand von $S^*(X;k)$ ist. Hierbei ist $\mathcal{B}^*_G(X;k)$ in natürlicher Weise ein $k[T]$-Modul. Ist $\alpha \in k$, so können wir also $\mathcal{B}^*_G(X;k)$ durch

$$\mathcal{B}_{G,\alpha}(X;k) := \mathcal{B}^*_G(X;k) \otimes_{k[T]} k_\alpha$$

an der Stelle α auswerten.

3 Der Satz

Mit Hilfe des verdrehten Tensorproduktes werden wir eine Beziehung zwischen der Kohomologie eines G-CW-Komplexes und der Kohomologie seiner Fixpunktmenge herstellen:

Satz. *Sei X ein endlichdimensionaler G-CW-Komplex, und $\alpha \in k$. Dann existieren natürliche k-Modul-Isomorphismen*

$$H_{G,\alpha}(X;k) := H(\mathcal{B}^*_G(X;k) \otimes_{k[T]} k_\alpha) \cong \begin{cases} H^{(*)}(X;k) & \text{falls } \alpha = 0 \\ H^{(*)}(X^G;k) & \text{falls } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Bemerkung. Diese k-Modul-Isomorphismen sind sogar k-Algebra-Isomorphismen (siehe etwa [AP]).

3.1 Ein Spezialfall – Räume mit trivialer $\mathbb{Z}_2$-Operation

Wir beweisen den Satz zunächst für den Spezialfall, dass die G-Operation auf X trivial ist, d. h.

$$\forall_{x \in X} \quad \forall_{a \in G} \quad ax = x,$$

bzw. $X^G = X$.

Lemma 1. *Sei X ein G-CW-Komplex mit trivialer G-Operation, und $\alpha \in k$. Dann existiert ein natürlicher k-Modul-Isomorphismus*

$$H_{G,\alpha}(X;k) \cong H^{(*)}(X;k).$$

Beweis. Nach Konstruktion des verdrehten Tensorproduktes ist

$$\mathcal{B}_{G,\alpha}(X;k) = \mathcal{B}^*_G(X;k) \otimes_{k[T]} k_\alpha = (S^*(X;k) \widetilde{\otimes} k[T]) \otimes_{k[T]} k_\alpha.$$

Wie sieht der Komplex $S^*(X;k) \widetilde{\otimes} k[T]$ aus? Es ist

$$S^*(X;k) \widetilde{\otimes} k[T] = \big(S^*(X;k) \otimes_k k[T],\ \widetilde{\delta}\big).$$

Bezeichnen wir mit δ den Korand von $S^*(X;k)$, so ist der Korand $\widetilde{\delta}$ gegeben durch (siehe Abschnitt 2)

$$\forall_{c\in S^*(X;k)} \quad \widetilde{\delta}(c \otimes_k 1) = (\delta c) \otimes_k 1 + \cdot c \cdot (1_G + g)) \otimes_k T.$$

Da G auf X trivial operiert, ist auch die induzierte G-Operation auf $S^*(X;k)$ trivial. Da ausserdem $\operatorname{char} k = 2$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\forall_{c\in S^*(X;k)} \quad \widetilde{\delta}(c \otimes_k 1) &= (\delta c) \otimes_k 1 + (c \cdot (1_G + g)) \otimes_k T \\ &= (\delta c) \otimes_k 1 + (2 \cdot c) \otimes_k T \\ &= (\delta c) \otimes_k 1 + (0 \cdot c) \otimes_k T \\ &= (\delta c) \otimes_k 1 + 0 \\ &= (\delta c) \otimes_k 1.\end{aligned}$$

Also ist in diesem Fall der $k[T]$-lineare Korand $\widetilde{\delta}$ die triviale Fortsetzung des Korandoperators δ von $S^*(X;k)$ auf $S^*(X;k) \otimes_k k[T]$. D. h. die Auswertung des Korandes $\widetilde{\delta}$ an der Stelle α stimmt mit δ überein.
Daher ist $\mathcal{B}_{G,\alpha}(S^*(X;k);k) = (S^*(X;k) \widetilde{\otimes} k[T]) \otimes_{k[T]} k_\alpha$ nicht nur als k-Modul, sondern sogar in δk-Mod natürlich isomorph zu $S^{(*)}(X;k)$, d. h. insbesondere sind auch

$$\begin{aligned}H_{G,\alpha}(X;k) &= H(\mathcal{B}_{G,\alpha}(S^*(X;k);k)) \\ &\cong H(S^{(*)}(X;k)) = H^{(*)}(X;k)\end{aligned}$$

natürlich isomorphe k-Moduln (direkte Summen und Kohomologie kommutieren). $\square$

Im allgemeinen Fall (siehe Abschnitt 3.2) werden wir dann ausnutzen, dass die Gruppenoperation auf der Fixpunktmenge (per Definition) trivial ist.

3.2 Der allgemeine Fall

Die Auswertung an der Stelle $\alpha = 0$

Auch bei der Auswertung an der Stelle $\alpha = 0$ ist der Korand $\widetilde{\delta}$ von $S^*(X;k) \widetilde{\otimes} k[T]$ nur die triviale Fortsetzung des Korandoperators δ von $S^*(X;k)$ auf $S^*(X;k) \otimes_k k[T]$:

Lemma 2. *Sei X ein G-CW-Komplex. Dann existiert ein natürlicher k-Modul-Isomorphismus*

$$H_{G,0}(X;k) \cong H^{(*)}(X;k).$$

Beweis. Wegen

$$\forall_{c\in S^*(X;k)} \quad \widetilde{\delta}(c \otimes_k 1) = (\delta c) \otimes_k 1 + (c \cdot (1_G + g)) \otimes_k T$$

verschwindet bei der Auswertung an der Stelle 0 der "lineare" Term, d. h. die Auswertung von $\widetilde{\delta}$ stimmt mit δ überein, woraus (analog zu oben) die Behauptung folgt. $\square$

... und der ganze Rest

Sei nun $\alpha \in k \setminus \{0\}$.
Wir definieren zwei äquivariante Kohomologietheorien (von der Kategorie der G-CW-Komplexe in die Kategorie der k-Moduln), auf die sich der Vergleichssatz (1.1.3) aus [AP] anwenden lässt.

Definition. Ist X ein G-CW-Komplex, so setzen wir

$$\forall_{q\in\mathbf{Z}} \quad h^q_G(X) := H_{G,\alpha}(X;k)$$
$$\forall_{q\in\mathbf{Z}} \quad k^q_G(X) := H_{G,\alpha}(X^G;k).$$

Lemma 3. *Die so definierten Funktoren h^*_G und k^*_G bilden jeweils eine ($\mathbf{Z}$-graduierte) äquivariante Kohomologietheorie.*

Im Beweis verwenden wir, dass der Funktor $\cdot \otimes_{k[T]} k_\alpha$, d. h. die Auswertung an der Stelle $\alpha \neq 0$, exakt ist.

Lemma 4. *Der Funktor $\mathcal{F}_\alpha \colon k[T]$-Mod $\longrightarrow k$-Mod mit*

$$M \mapsto M \ \otimes_{k[T]} k_\alpha$$

ist exakt.

Beweis. Da das Tensorprodukt ein rechtsexakter Funktor ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{F}_\alpha(i) \colon \mathcal{F}_\alpha(A) \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha(B)$ injektiv ist, falls $A, B \in k[T]$-Mod, und $i \colon A \longrightarrow B$ injektiv ist. Sei oBdA bereits $A \subset B$.
Wir betrachten die Darstellungen

$$\mathcal{F}_\alpha(A) = A \ \otimes_{k[T]} k_\alpha = A/(T-\alpha)A,$$
$$\mathcal{F}_\alpha(B) = B \ \otimes_{k[T]} k_\alpha = B/(T-\alpha)B.$$

Sei $[a] \in \ker \mathcal{F}_\alpha(i)$, d. h. es existiert ein $b \in B$, so dass

$$a = b \cdot (T - \alpha).$$

Wir müssen also zeigen, dass b bereits in A liegt: Wegen $a \in A, b \in B$ gibt es Darstellungen

$$a = \sum_{q\in\mathbf{Z}} a_q,$$
$$b = \sum_{q\in\mathbf{Z}} b_q,$$

so dass (für alle $q \in \mathbf{Z}$) $a_q \in A_q$ und $b_q \in B_q$. Dabei sind diese Summen jeweils endlich. Aus der Gleicheit $a = b \cdot (T - \alpha)$ erhalten wir in den einzelnen Graden (Koeffizientenvergleich)

$$\forall_{q\in\mathbf{Z}} \quad a_q = b_{q-1} \cdot T - \alpha \cdot b_q.$$

Da obige Summen jeweils endlich sind, existieren minimale Indices $q_a, q_b \in \mathbf{Z}$ mit $a_{q_a} \neq 0$ und $a_{q_b} \neq 0$. *Angenommen,* $q_b < q_a$, d. h.

$$0 = b_{q-1} \cdot T - \alpha \cdot b_q = 0 - \alpha \cdot b_q$$

im Widerspruch – wegen $\alpha \neq 0$ – zur Minimalität von q_b. Also ist $q_b \geq q_a$, und damit

$$a_{q_b} = b_{q_b - 1} \cdot T - \alpha \cdot b_q = 0 - \alpha \cdot b_q,$$

d. h. – wegen $\alpha \neq 0$ – ist insbesondere $b_{q_b} \in A$. Induktiv erhalten wir aus

$$\forall_{q \in \mathbf{Z}} \quad b_q = \frac{1}{\alpha} \cdot (b_q \cdot T - a_q),$$

dass $b = \sum_{q \in \mathbf{Z}} b_q$ bereits in A liegt. Also ist

$$[a] = [b \cdot (T - \alpha)] = 0,$$

womit die Injektivität von $\mathcal{F}_\alpha(i)$ nachgewiesen ist. □

Beweis. (von Lemma 3). Wir führen dies auf die Tatsache zurück, dass der Funktor $H_G^* = H(\mathcal{B}_G^*(\,\cdot\,; k))$ eine äquivariante Kohomologietheorie ist (siehe [AP]).
(A) Wir können den Funktor h_G^* zerlegen in

$$h_G^* = \big(H_{G,\alpha}(\,\cdot\,; k)\big)_{q \in \mathbf{Z}} = \big(H\big(\mathcal{B}_G^*(\,\cdot\,; k) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big)\big)_{q \in \mathbf{Z}} = \big(H\big(\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{B}_G^*(\,\cdot\,; k))\big)\big)_{q \in \mathbf{Z}}.$$

Wegen der Exaktheit von $\mathcal{F}_\alpha$ folgt also

$$h_G^* = \big(\mathcal{F}_\alpha \circ H\big(\mathcal{B}_G^*(\,\cdot\,; k)\big)\big)_{q \in \mathbf{Z}} = \big(\mathcal{F}_\alpha \circ H_G^*\big)_{q \in \mathbf{Z}}.$$

GCT1: Seien X, Y zwei G-CW-Komplexe und $f_0, f_1\colon X \longrightarrow Y$ homotope Abbildungen. Da H_G^* eine äquivariante Kohomologietheorie ist, folgt

$$H_G^*(f_0) = H_G^*(f_1),$$

d. h. insbesondere ist auch

$$h_G^*(f_0) = \big(\mathcal{F}_\alpha \circ H_G^*(f_0)\big)_{q \in \mathbf{Z}} = \big(\mathcal{F}_\alpha \circ H_G^*(f_1)\big)_{q \in \mathbf{Z}} = h_G^*(f_1).$$

Also ist h_G^* homotopieinvariant.
GCT2: Seien $X_1, X_0 \subset X_2, X$ vier G-CW-Komplexe und $\varphi\colon X_0 \longrightarrow X_1$ eine zelluläre G-Abbildung, wobei

$$X = X_1 \cup_\varphi X_2,$$

d. h. X entsteht aus X_1 durch Anheften von X_2 längs X_0. Da H_G^* eine äquivariante Kohomologietheorie ist, erhalten wir eine lange exakte Mayer-Vietoris-Folge

$$\cdots \longrightarrow H_G^n(X_0; k) \xrightarrow{\delta} H_G^{n+1}(X; k) \longrightarrow H_G^{n+1}(X_1; k) \times H_G^{n+1}(X_2; k) \longrightarrow H_G^{n+1}(X_0; k) \longrightarrow \cdots$$

Der Funktor $\mathcal{F}_\alpha$ ist exakt, und überführt (da $\delta k[T]$-Mod unter ker- bzw. im-Bildung abgeschlossen ist) daher auch lange exakte Folgen in lange exakte Folgen, d. h. die Folge

$$\cdots \longrightarrow \big(\mathcal{F}_\alpha(H^n_G(X_0;k))\big)_{q\in\mathbf{Z}} \overset{\left(\mathcal{F}_\alpha(\delta)\right)_{q\in\mathbf{Z}}}{\longrightarrow} \big(\mathcal{F}_\alpha(H^{n+1}_G(X;k))\big)_{q\in\mathbf{Z}} \longrightarrow$$
$$\big(\mathcal{F}_\alpha(H^{n+1}_G(X_1;k)\times H^{n+1}_G(X_2;k))\big)_{q\in\mathbf{Z}} \longrightarrow \big(\mathcal{F}_\alpha(H^{n+1}_G(X_0;k))\big)_{q\in\mathbf{Z}} \longrightarrow \cdots$$

ist exakt. Wegen (für alle $n\in\mathbf{Z}$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\alpha(H^{n+1}_G(X_1;k)\times H^{q+1}_G(X_2;k)) &= (H^{n+1}_G(X_1;k)\times H^{n+1}_G(X_2;k))\ \otimes_{k[T]} k_\alpha\\
&= (H^{n+1}_G(X_1;k)\oplus H^{n+1}_G(X_2;k))\ \otimes_{k[T]} k_\alpha\\
&= (H^{n+1}_G(X_1;k)\ \otimes_{k[T]} k_\alpha)\oplus (H^{n+1}_G(X_2;k)\ \otimes_{k[T]} k_\alpha)\\
&= \mathcal{F}_\alpha(H^{n+1}_G(X_1;k))\oplus \mathcal{F}_\alpha(H^{n+1}_G(X_2;k))\\
&= \mathcal{F}_\alpha(H^{n+1}_G(X_1;k))\times \mathcal{F}_\alpha(H^{n+1}_G(X_2;k))
\end{aligned}$$

liefert also auch $h^*_G = \big(\mathcal{F}_\alpha\circ H^*_G\big)_{q\in\mathbf{Z}}$ eine entsprechende lange exakte Mayer-Vietoris-Folge. Also ist h^*_G eine äquivariante Kohomologietheorie.
(B) Andersherum können wir den Funktor k^*_G zerlegen in

$$k^*_G = \big(H_{G,\alpha}(\ \cdot^G;k)\big)_{q\in\mathbf{Z}} = h^*_G\circ\mathcal{F}^G,$$

wobei $\mathcal{F}^G\colon G\text{-CW}\longrightarrow G\text{-CW}$ mit

$$X\mapsto X^G.$$

Auch $\mathcal{F}^G$ ist ein Funktor, denn: Seien X,Y zwei G-CW-Komplexe und $f\colon X\longrightarrow Y$ eine äuivariante stetige Abbildung. Dass $\mathcal{F}^G(X)$ und $\mathcal{F}^G(Y)$ wieder G-CW-Komplexe sind, ist wegen $G=\mathbf{Z_2}$ klar. Weiter ist $f(X^G)\subset Y^G$, d. h. $\mathcal{F}^G(f)=f|_{X^G}$ ist wohldefiniert. Also ist $\mathcal{F}^G$ ein Funktor.
GCT1: Seien X,Y zwei G-CW-Komplexe und $f_0,f_1\colon X\longrightarrow Y$ äquivariante stetige Abbildungen mit $f_0\simeq f_1$, d. h. es gibt eine entsprechende Homotopie $S: I\times X\longrightarrow Y$ (dabei bezeichnet I das Einheitsintervall $[0,1]$). Dann liefert die Einschränkung

$$S|_{I\times X^G}\colon I\times X^G\longrightarrow Y^G$$

eine Homotopie von $f_0|_{X^G}=\mathcal{F}^G(f)$ und $f_1|_{X^G}=\mathcal{F}^G(f_1)$, d. h. $\mathcal{F}^G$ überführt homotope Abbildungen in homotope Abbildungen. Also ist – da h^*_G nach (A) homotopieinvariant ist – auch

$$k^*_G(f_0) = h^*_G\circ\mathcal{F}^G(f_0) = h^*_G\circ\mathcal{F}^G(f_1) = k^*_G(f_1).$$

GCT2: Seien $X_1,X_0\subset X_2,X$ und $\varphi\colon X_0\longrightarrow X_1$ wie oben. Dann ist

$$\mathcal{F}^G(X) = \mathcal{F}^G(X_1)\cup_{\mathcal{F}^G(\varphi)}\mathcal{F}^G(X_2),$$

denn: Dass $\mathcal{F}^G(X_0)=X_0^G$ ein Unterkomplex von $X_2^G=\mathcal{F}^G(X_2)$ ist, ist klar. Da die Verheftungsabbildung φ mit der G-Operation verträglich ist, ist

$$\mathcal{F}^G(\varphi) = \varphi|_{X_0^G}\colon X_0^G\longrightarrow X_1^G$$

eine zelluläre G-Abbildung und

$$\begin{aligned} X^G &= (X_1 \cup_\varphi X_2)^G = ((X_1 \sqcup X_2)/_\varphi)^G = (X_1 \sqcup X_2)^G/_\varphi \\ &= (X_1^G \sqcup X_2^G)/_\varphi = (X_1^G \sqcup X_2^G)/_{\varphi|_{X_0^G}} \\ &= X_1^G \cup_{\varphi|_{X_0^G}} X_2^G. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}^G(X) = \mathcal{F}^G(X_1) \cup_{\mathcal{F}^G(\varphi)} \mathcal{F}^G(X_2)$.
Daher erhalten wir eine lange exakte Mayer-Vietoris-Folge

$$\cdots \longrightarrow h_G^n(X_0;k) \xrightarrow{\delta} h_G^{n+1}(X;k) \longrightarrow h_G^{n+1}(X_1;k) \times h_G^{n+1}(X_2;k) \longrightarrow h_G^{n+1}(X_0;k) \longrightarrow \cdots$$

woraus die Behauptung folgt. □

Um den Vergleichssatz anwenden zu können, benötigen wir eine natürliche Transformation $h_G^* \longrightarrow k_G^*$.

Lemma 5. *Die Inklusion der Fixpunktmenge (bezüglich G) $X \mapsto (X^G \hookrightarrow X)$ induziert eine natürliche Transformation $\tau\colon h_G^* \longrightarrow k_G^*$.*

Beweis. Seien X, Y zwei G-CW-Komplexe und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine äquivariante stetige Abbildung. Also ist $f(X^G) \subset Y^G$, d. h. das Diagramm (wobei i_X und i_Y die entsprechenden Inklusionen bezeichnen)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X^G \arrow[u, hook, "i_X"] \arrow[r, "f|_{X^G}"'] & Y^G \arrow[u, hook', "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Der Funktor

$$H_{G,\alpha}(\,\cdot\,;k) = H\big(S^*(\,\cdot\,;k)\ \widetilde{\otimes}\ k[T]\ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big)$$

ist eine Komposition von Funktoren, von denen genau einer (nämlich $S^*(\cdot;k)$) kontravariant ist. Also erhalten wir induzierte Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} H_{G,\alpha}(X;k) \arrow[d, "\tau(X) = i_X^*"'] & H_{G,\alpha}(Y;k) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "i_Y^* = \tau(Y)"] \\ H_{G,\alpha}(X^G;k) & H_{G,\alpha}(Y^G;k). \arrow[l, "f|_{X^G}^*"] \end{tikzcd}$$

Da Funktoren ausserdem mit Komposition verträglich sind, ist

$$i_X^* \circ f^* = (f \circ i_X)^* = (i_Y \circ f|_{X^G})^* = f|_{X^G}^* \circ i_Y^*;$$

also ist auch das Diagramm der induzierten Abbildungen kommutativ, d. h. die Inklusion induziert eine natürliche Transformation. □

Diese beiden Kohomologietheorien stimmen auf endlichdimensionalen G-CW-Komplexen (bis auf Isomorphie) überein:

Lemma 6. *Der Homomorphismus $\tau(X)$ ist für jeden endlichdimensionalen G-CW-Komplex X sogar ein Isomorphismus.*

Beweis. Die einzigen Untergruppen von $G = \mathbf{Z_2}$ sind G und $\{1_G\}$; also genügt es – nach Satz (1.1.3) und Bemerkung (1.1.4)(2) in [AP] – zu zeigen, dass $\tau(X)$ in den folgenden beiden Fällen ein Isomorphismus ist:

(A) Falls X eine (nichtleere) disjunkte Vereinigung von Punkten (mit trivialer G-Operation) ist, d. h. $X = \coprod *$. (Wobei wir mit $*$ den Raum bezeichnen, der nur aus einem Punkt besteht.)

(B) Falls X eine (nichtleere) disjunkte Vereinigung freier G-Orbits ist, d. h. $X = \coprod G$.

(A) In diesem Fall ist $X^G = X$, d. h. die Inklusion $X^G \hookrightarrow X$ ist die Identität. Da aber $\tau(X)$ eine durch einen Funktor induzierte Abbildung ist, folgt

$$\tau(X) = \mathrm{id}_{H_{G,\alpha}(X;k)},$$

d. h. insbesondere ist $\tau(X)$ ein Isomorphismus.
(B) Sei also nun $X = \coprod G$ eine disjunkte Vereinigung freier G-Orbits, d. h. $X^G = \emptyset$. Wegen $S_*(\emptyset; k) = 0$ ist

$$\begin{aligned} H_{G,\alpha}(X^G; k) &= H\big(S^*(X^G; k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T] \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big) \\ &= H\big(0 \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T] \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big) \\ &= H(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher müssen wir zeigen, dass auch $H_{G,\alpha}(X; k) = 0$ ist: Dazu verwenden wir den zellulären Kokettenkomplex

$$W^*(X;k) = W^*\left(\coprod G; k\right) \cong \prod W^*(G;k) \cong \prod k[G]$$

von X (insbesondere verschwindet dessen Randoperator δ_W überall). Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{G,\alpha}(S^*(X;k);k) &\simeq \mathcal{B}_{G,\alpha}(W^*(X;k);k) \\ &\cong \mathcal{B}^*_G(W^*(X;k);k) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \\ &\cong \big(W^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]\big) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \\ &\cong \left(\left(\prod k[G]\right) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]\right) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \\ &\cong \prod \big((k[G] \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big). \end{aligned}$$

Da Homologie und direkte Produkte kommutieren, genügt daher es zu zeigen, dass

$$H\big((k[G] \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big) = 0.$$

Es ist

$$(k[G] \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \cong k[G]$$

als $k[G]$-Modul (via $(c \mathbin{\widetilde{\otimes}} 1) \ \otimes_{k[T]} 1 \longmapsto c$), da die $k[T]$-Modul-Struktur auf $k[G] \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]$ gerade durch $\widetilde{\otimes}\ k[T]$ gegeben ist. Für den durch diesen Isomorphismus induzierten Randoperator $\widetilde{\delta}_\alpha$ auf $k[G]$ erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}_\alpha(1_G) &= 1 \cdot (\delta_W 1_G) + \alpha \cdot (1_G \cdot (1_G + g)) \\
&= \alpha \cdot (1_G + g), \\
\widetilde{\delta}_\alpha(g) &= 1 \cdot (\delta_W g) + \alpha \cdot (g \cdot (1_G + g)) \\
&= 0 + \alpha \cdot (g + gg) \\
&= \alpha \cdot (g + 1_G),
\end{aligned}$$

wobei $\{1_G, g\}$ die kanonische Basis von $k[G] \cong k \oplus k$ als k-Algebra ist. Wegen $\alpha \neq 0$ und $\operatorname{char} k = 2$ ist

$$\operatorname{im} \widetilde{\delta}_\alpha = k \cdot (1_G + g) = \ker \widetilde{\delta}_\alpha,$$

d. h.

$$H((k[G], \widetilde{\delta}_\alpha)) = \ker \widetilde{\delta}_\alpha / \operatorname{im} \widetilde{\delta}_\alpha = 0.$$

Also ist auch $H_{G,\alpha}(X; k) = 0$, und damit $\tau(X)$ ein Isomorphismus. □

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun den zweiten Teil des Satzes beweisen:

Lemma 7. *Sei X ein endlichdimensionaler G-CW-Komplex und $\alpha \in k \setminus \{0\}$. Dann gibt es einen natürlichen k-Modul-Isomorphismus*

$$H_{G,\alpha}(X; k) \cong H^{(*)}(X^G; k).$$

Beweis. Mit Lemma 6 folgt, dass

$$H_{G,\alpha}(X; k) = h^*_G(X) \cong k^*_G(X) = H_{G,\alpha}(X^G; k)$$

natürlich isomorphe k-Moduln sind. Da aber die G-Operation auf der Fixpunktmenge (per Definition) trivial ist, erhalten wir aus Lemma 1 den natürlichen k-Modul-Isomorphismus

$$H_{G,\alpha}(X^G; k) \cong H^{(*)}(X^G; k),$$

d. h. $H_{G,\alpha}(X; k)$ und $H^{(*)}(X^G; k)$ sind natürlich isomorphe k-Moduln. □

4 Anwendungen

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Resultat:

Korollar. *Sei X ein endlichdimensionaler G-CW-Komplex. Dann gelten (jeweils als k-Moduln):*

(A) Ist $H^*(X;k) \cong k$, so ist auch

$$H^*(X^G;k) \cong k$$

(d.h. insbesondere im Grad Null konzentriert).

$S^{-1} := \emptyset$ *(B) Ist $H^*(X;k) \cong H^*(S^n;k)$, so existiert ein $m \in \{-1, \ldots, n\}$ mit*

$$H^*(X^G;k) \cong H^*(S^m;k).$$

Im Beweis verwenden wir das minimale Hirsch-Brown-Modell $H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]$. Dieses besitzt die folgenden Eigenschaften ([AP]):

- Die beiden Komplexe $\mathcal{B}_G^*(S^*(X;k);k)$ und $H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]$ sind kettenhomotopieäquivalent.
- Der Korand $\widetilde{\delta}$ dieses Modells ist $k[T]$-linear und gegeben durch "Polynome"

  $$\forall_{c \in H^*(X;k)} \quad \widetilde{\delta}(c \otimes_k 1) = \sum_{j=1}^{\ell(c)} (c_j(c) \otimes_k T^j)$$

  wobei der konstante Term jeweils verschwindet, und der lineare Term durch die induzierte Gruppenoperation in der Kohomologie gegeben ist.

Beweis. Nach obigem Satz ist

$$\forall_{\alpha \in k \setminus \{0\}} \quad H^{(*)}(X^G;k) \cong H_{G,\alpha}(X;k).$$

Sei also im folgenden $\alpha \in k \setminus \{0\}$.
Da $\mathcal{B}_G^*(S^*(X;k);k)$ und das minimale Hirsch-Brown-Modell $H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]$ über $k[T]$ kettenhomotopieäquivalent sind, genügt es die Homologie dieses Modells mit Koeffizienten in k_α

$$H((H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \otimes_{k[T]} k_\alpha) \cong H(\mathcal{B}_G^*(S^*(X;k);k) \otimes_{k[T]} k_\alpha) = H_{G,\alpha}(X;k)$$

zu berechnen.
Der Korandoperator $\widetilde{\delta}$ ist $k[T]$-linear und daher durch die Werte auf $H^*(X;k) \otimes_k 1 \subset H^*(X;k) \otimes_k k[T]$ eindeutig bestimmt. Ist $c \in H^*(X;k)$, so ist also (siehe oben und Abschnitt 2)

$$c_1(c) = c \cdot (1_G + g).$$

Wir versuchen nun $\widetilde{\delta}$ so gut wie möglich zu charakterisieren:

Lemma 8. *Ist $q \in \mathbf{Z}$ und $H^q(X;k) \cong k$, so verschwindet der lineare Anteil von $\widetilde{\delta}$ auf $H^q(X;k)$.*

Beweis. Die G-Wirkung auf $H^*(X;k)$ wird via

$$H^*(X;k) = H^*(X;\mathbf{Z_2}) \otimes_{\mathbf{Z_2}} k$$

durch die G-Wirkung auf $H^*(X;\mathbf{Z_2}) \cong \mathbf{Z_2}$ induziert. Wir bezeichnen mit $\gamma\colon H^*(X;\mathbf{Z_2}) \longrightarrow H^*(X;\mathbf{Z_2})$ den nichttrivialen Teil der G-Wirkung, d. h.

$$\forall_{c \in H^*(X;\mathbf{Z_2})} \quad c \mapsto \gamma(c) := c \cdot g.$$

Da $c_1\colon H^*(X;\mathbf{Z_2}) \longrightarrow H^*(X;\mathbf{Z_2})$ ein $\mathbf{Z_2}$-Modul-Homomorphismus ist, ist auch

$$\gamma = c_1 - \mathrm{id}_{H^*(X;\mathbf{Z_2})}$$

ein $\mathbf{Z_2}$-Modul-Homomorphismus. Ausserdem ist

$$\begin{aligned}\forall_{c \in H^*(X;\mathbf{Z_2})} \quad \gamma \circ \gamma(c) &= \gamma(c \cdot g) = (c \cdot g) \cdot g \\ &= c \cdot (g \cdot g) = c \cdot 1_G \\ &= c,\end{aligned}$$

d. h. γ ist sogar ein $\mathbf{Z_2}$-Modul-Isomorphismus. Wegen $H^q(X;\mathbf{Z_2}) \cong \mathbf{Z_2}$ erhalten wir also $\gamma = \mathrm{id}_{H^*(X;\mathbf{Z_2})}$.
Damit folgt

$$c_1 = \mathrm{id}_{H^*(X;\mathbf{Z_2})} + \gamma = \mathrm{id}_{H^*(X;\mathbf{Z_2})} + \mathrm{id}_{H^*(X;\mathbf{Z_2})} = 0,$$

d.h. der lineare Anteil von $\widetilde{\delta}$ verschwindet auf $H^*(X;\mathbf{Z_2})$, und damit auch auf $H^*(X;k) = H^*(X;\mathbf{Z_2}) \otimes_{\mathbf{Z_2}} k$. $\square$

Lemma 9. *Ist $H^*(X;k)$ im Grad Null konzentriert, so verschwinden alle Terme von $\widetilde{\delta}$ der Ordnung grösser gleich 2.*

Beweis. Ist $c \in H^0(X;k)$, so ist

$$\deg \widetilde{\delta}(c) = 0 + 1 = 1;$$

andererseits ist aber

$$\forall_{d \in H^0(X;k)} \quad \forall_{j \in \mathbf{N}_{\geq 2}} \quad \deg(d \otimes_k T^j) = \deg(d) + \deg(T^j) = 0 + j > 1,$$

und

$$\forall_{d \in H^*(X;k) \setminus H^0(X;k)} \quad \forall_{j \in \mathbf{N}} \quad d \otimes_k T^j = 0 \otimes_k T^j = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Fortsetzung des *Beweises* des Korollars:
(A) In diesem Fall sind wegen $H^*(X;k) = H^0(X;k) \cong k$ die Voraussetzungen der beiden Lemmata erfüllt, d. h. der Korand $\widetilde{\delta}$ verschwindet. Also ist

$$H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T] \cong k \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T] \cong k[T]$$

mit trivialem Rand, d. h.

$$\begin{aligned} H_{G,\alpha}(X;k) &\cong H((H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha) \\ &\cong H(k[T] \ \otimes_{k[T]} k_\alpha) \\ &\cong k[T] \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \\ &\cong k, \end{aligned}$$

woraus wir – wegen $\alpha \neq 0$ – mit dem Satz

$$H^{(*)}(X^G;k) \cong H_{G,\alpha}(X;k) \cong k,$$

und damit (da Alles im Grad Null konzentriert ist) $H^*(X^G;k) \cong k$ erhalten. Damit ist (A) gezeigt.
(B) Wir unterscheiden die folgenden beiden Fälle: ① Sei $n > 0$. Dann liegen die beiden Summanden k von $H^*(X;k)$ in den (verschiedenen) Dimensionen 0 und n. Seien a bzw. b jeweils die Erzeugenden, d. h.

$$\deg a = 0 \text{ und } \deg b = n.$$

Mit Lemma 8 erhalten wir $c_1(a) = 0$. Da $\widetilde{\delta}$ den Grad um 1 erhöht und $k[T]$-linear ist, ist – aus Gradgründen – der einzig mögliche nichttriviale Term von $\widetilde{\delta}$ durch

$$\widetilde{\delta}(b) = \lambda \cdot a \cdot T^{n+1}$$

(mit einem gewissen $\lambda \in k$) gegeben.

- Ist $\lambda = 0$, so verschwindet der gesamte Korand $\widetilde{\delta}$, d. h. auch die Auswertung $\widetilde{\delta}_\alpha$. Also ist

$$\begin{aligned} H_{G,\alpha}(X;k) &\cong H\big((H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big) \\ &\cong (H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \\ &\cong (k[T] \oplus k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \\ &\cong k \oplus k. \end{aligned}$$

- Ist $\lambda \neq 0$, so ist $\widetilde{\delta}_\alpha(b \ \otimes_k 1) = \lambda \cdot a \cdot \alpha^{n+1}$, d. h. wegen $\alpha \neq 0$ folgt

$$\operatorname{im} \widetilde{\delta}_\alpha = k \cdot a = \ker \widetilde{\delta}_\alpha,$$

und damit

$$H_{G,\alpha}(X;k) = \ker \widetilde{\delta}_\alpha / \operatorname{im} \widetilde{\delta}_\alpha = 0.$$

② Sei $n = 0$, d. h. $H^*(X;k) = H^0(X;k) \cong k \oplus k$. Wegen Lemma 9 besteht $\widetilde{\delta}$ also nur aus dem linearen Term. Verschwindet auch dieser, so ist $\widetilde{\delta} = 0$ bzw. $\widetilde{\delta}_\alpha = 0$, und damit

$$\begin{aligned} H_{G,\alpha}(X;k) &\cong H\big((H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big) \\ &\cong (H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \\ &\cong ((k \oplus k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \\ &\cong k \oplus k. \end{aligned}$$

Ist der lineare Term hingegen nicht Null, so folgt (durch Durchprobieren aller $\mathbf{Z_2}$-Modul-Isomorphismen von $\mathbf{Z_2} \oplus \mathbf{Z_2}$)

$$H_{G,\alpha}(X;k) = 0.$$

Sowohl in ① als auch in ② ist also

$$H_{G,\alpha}(X;k) \cong H^*(S^m;k)$$

für ein gewisses $m \in \{-1, 0, \dots\}$. Wir zeigen nun, dass $m \le n$ ist: Ist $\widetilde{\delta} \neq 0$, so ist (siehe oben) $H_{G,\alpha}(X;k) = 0$, d. h. mit dem Satz folgt

$$H^*(X^G;k) \cong H_{G,\alpha}(X;k) \cong H^*(S^{-1};k).$$

Sei also im folgenden $\widetilde{\delta} = 0$: Die Inklusion $j\colon X^G \hookrightarrow X$ der Fixpunktmenge induziert eine $k[T]$-lineare Kettenabbildung

$$j^*\colon H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T] \longrightarrow H^*(X^G;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]$$

der minimalen Hirsch-Brown-Modelle. Da G auf X^G trivial operiert, verschwindet auch der induzierte Korand von $H^*(X^G;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]$, d. h.

$$H(H^*(X^G;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) = H^*(X^G;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T].$$

Ebenso ist wegen $\widetilde{\delta} = 0$

$$H(H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) = H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T],$$

und damit

$$j^*\colon H(H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \longrightarrow H(H^*(X^G;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]).$$

Durch Auswerten an der Stelle $\alpha \neq 0$ erhalten wir eine Abbildung

$$j^*_\alpha\colon H(H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha \longrightarrow H(H^*(X^G;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha,$$

die wegen der Exaktheit von $\mathcal{F}_\alpha = \cdot \ \otimes_{k[T]} k_\alpha$ einem Homomorphismus

$$\begin{aligned} &j^*_\alpha\colon H\big((H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big) \longrightarrow H\big((H^*(X^G;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T]) \ \otimes_{k[T]} k_\alpha\big) \\ &\quad = H_{G,\alpha}(X;k) \longrightarrow H_{G,\alpha}(X^G;k) \end{aligned}$$

entspricht. Da aber j_α^* durch die Inklusion $j\colon X^G \hookrightarrow X$ induziert ist, folgt

$$j_\alpha^* = \tau(X),$$

was nach Lemma 6 ein k-Modul-Isomorphismus ist.
Angenommen, $m > n$. Da j^* als Kettenabbildung den Grad erhält und $k[T]$-linear ist, können wir j^* durch

$$\begin{tikzcd} H^*(X;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T] \arrow[rr, "j^*"] \arrow[dr] & & H^*(X^G;k) \mathbin{\widetilde{\otimes}} k[T] \\ & H^0(X;k) \otimes_k k[T] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

faktorisieren. Also erhalten wir durch Auswertung an der Stelle α, eine Zerlegung

$$\begin{tikzcd} k \oplus k \arrow[rr, "j_\alpha^*"] \arrow[dr] & & k \oplus k \\ & k \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

von j_α^*, im Widerspruch dazu, dass j_α^* ein k-Modul-Isomorphismus ist.
Daher ist $m \leq n$, und damit das Korollar vollständig bewiesen. $\square$

Literatur

[AP] Allday, V.Puppe: *Cohomological methods in transformation groups*, Cambridge.

[tD] Tom Dieck: *Topologie*, de Gruyter.

[Do] Dold: *Lectures on Algebraic Topology*, Springer.