Hindernisse für Schnitte von Faserungen

Clara Strohm (strohm@math.uni-muenster.de)

4. Juni 2002

In Abschnitt 12 von [MS] wird dargestellt, wie charakteristische Klassen von Vektorraumbündeln (etwa die Stiefel-Whitney-Klassen oder die Eulerklasse) und Hindernisse zur Fortsetzung von Schnitten zusammenhängen. Dazu entwickeln wir hier eine Hindernistheorie für Faserungen (Vektorraumbündel sind spezielle Faserungen). Dafür benötigen wir jedoch eine allgemeinere Kohomologietheorie, denn die Homotopiegruppen der Fasern sind im allgemeinen nicht kanonisch isomorph. Mit diesem Hilfsmittel erhalten wir analog zu [IfO] eine Hindernistheorie.
Zunächst führen wir das Schnittproblem auf ein partielles Liftungsproblem zurück. Für dieses werden charakteristische Klassen entwickelt, die sich in gewissen Spezialfällen (wenn die Fasern hinreichend einfach sind) durch Kohomologieoperationen berechnen lassen. Ausserdem erhalten wir eine Homotopieklassifikation für Liftungen.

1 Lokale Koeffizientensysteme

Im folgenden sei B ein topologischer Raum und $\Pi(B)$ sein Fundamentalgruppoid. Wir wollen präzisieren, was ein "lokales Koeffizientensystem" ist. Am einfachsten geht dies wie folgt:

Definition. Ein **Gruppenbündel über** B ist ein Funktor $\Pi(B) \longrightarrow$ Gruppen. Ein **Bündel abelscher Gruppen** (oder **lokales Koeffizientensystem**) ist ein Funktor $\Pi(B) \longrightarrow$ Abel.

Ein erstes Beispiel sind die Gruppenbündel, die eigentlich gar keine "Bündel" sind:

Definition. Sei Γ eine Gruppe und G der Funktor $\Pi(B) \longrightarrow$ Gruppen, der alle Objekte auf Γ und alle Morphismen auf die Identität abbildet. Dann ist G das **konstante Bündel zu** Γ.

Definition. Seien G und H Gruppenbündel über B. Ein **Homomorphismus von Gruppenbündeln** $\Phi\colon G \longrightarrow H$ ist eine natürliche Transformation der Funktoren G bzw. H. Ein solcher Homomorphismus Φ heisst **Isomorphismus**, falls der Gruppenhomomorphismus $\Phi(b)$ für alle $b \in B$ ein Isomorphismus ist.

Definition. Ein Gruppenbündel heisst **einfach**, wenn es zu einem konstanten Gruppenbündel isomorph ist.

Bemerkung. Ein Gruppenbündel G über einem wegzusammenhängenden Raum B ist genau dann einfach, wenn für alle Punkte $b_0, b_1 \in B$ und alle Wege u, v von b_0 nach b_1 gilt:

$$G(u) = G(v).$$

□

Beispiel. Sei B wegzusammenhängend und G ein Gruppenbündel über B, so dass es ein $b \in B$ gibt mit $G(b) \cong \mathbf{Z}/2$. Dann ist G einfach. Dies ist ein Fall, der etwa in Abschnitt 12 von [MS] auftritt.

Es gibt allerdings auch nichttriviale Beispiele für Gruppenbündel:

Beispiel. Ist $n \in \mathbf{N}$, so bilden die Homotopiegruppen $(\pi_n(B, b))_{b \in B}$ mit dem Funktor τ (siehe [IfO]) ein Gruppenbündel über B. Ist $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$, so ist dies ein Bündel abelscher Gruppen. Ein solches Gruppenbündel ist offensichtlich genau dann einfach, wenn B ein n-einfacher Raum ist.

1.1 Lokale Koeffizientensysteme für Faserungen

Sei $p\colon X \longrightarrow B$ eine Faserung mit n-einfacher Faser F.

Definition. Sei $u\colon I \longrightarrow B$ ein Weg von b_0 nach b_1. Eine Abbildung $h\colon F_{b_1} \longrightarrow F_{b_0}$ heisst **u-zulässig**, falls es eine Homotopie $H\colon I \times F_{b_1} \longrightarrow X$ von h zur Inklusion $i_1\colon F_{b_1} \hookrightarrow X$ gibt, die **über u liegt**, d.h.

$$\forall_{(t,y) \in I \times F_{b_1}} \quad p \circ H(t, y) = u(t).$$

Wir definieren nun einen Funktor $\varphi := \pi_n(\mathcal{F}) : \Pi(B) \longrightarrow \text{Abel}$ wie folgt:

- Für jeden Punkt $b \in B$ sei
$$\varphi(b) := \pi_n(F_b).$$
- Sei $u\colon I \longrightarrow B$ ein Weg von b_0 nach b_1. Da p eine Faserung ist (und somit die Homotopieliftungseigenschaft besitzt), gibt es eine u-zulässige Abbildung $h\colon F_{b_1} \longrightarrow F_{b_0}$, denn:

  Sei $U\colon I \times F_{b_1} \longrightarrow B$ gegeben durch
$$(t, x) \longmapsto u(t),$$
  d.h. das Diagramm
$$\begin{tikzcd} \{1\} \times F_{b_1} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times F_{b_1} \arrow[r, "U"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann liefert die Homotopieliftungseigenschaft eine Homotopie $H\colon I \times F_{b_1} \longrightarrow X$ mit $p \circ H = U$. Dabei ist $h := H_0\colon F_{b_1} \longrightarrow F_{b_0}$ die gesuchte Abbildung.

Wir setzen dann

$$\varphi([u]) := \pi_n([h]).$$

Dass $\pi_n(\mathcal{F})$ dadurch zu einem wohldefinierten Funktor wird, liegt im Wesentlichen an der Homotopieliftungseigenschaft (siehe [Wh, p. 185f]). Dabei faktorisiert er nach Konstruktion über der Kategorie der topologischen Räume (mit Homotopieklassen von Abbildungen).
Dieser Funktor ist das lokale Koeffizientensystem, das wir später für die Hindernisse verwenden werden.

2 (Ko)Homologie mit lokalen Koeffizienten

Wir wollen eine (Ko)Homologietheorie konstruieren, in der wir die Hindernistheorie für Schnitte von Faserungen analog zur Hindernistheorie über n-einfachen Räumen (siehe [IfO] bzw. [Wh, V5f]) entwickeln können. Hier haben wir allerdings das Problem, dass die Homotopiegruppen von den Grundpunkten abhängen können.
Die Konstruktion der singulären (Ko)Homologie mit lokalen Koeffizienten erfolgt völlig analog zur singulären Theorie.

2.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum und G ein lokales Koeffizientensystem über X. Zu $q \in \mathbf{N}$ bezeichnen wir mit $b_0, \ldots, b_q$ die Einheitsvektoren in $\mathbf{R}^{q+1}$.

Definition. Zu $q \in \mathbf{N}$ sei $C_q(X; G)$ die Menge der Abbildungen c mit:

- für jeden singulären q-Simplex $u\colon \Delta^q \longrightarrow X$ ist $c(u) \in G(u(b_0))$, und
- es gibt nur endlich viele q-Simplices u mit $c(u) \neq 0$.

Die Elemente von $C_q(X; G)$ heissen **singuläre q-Ketten mit Koeffizienten in G**. Ein $c \in C_q(X; G)$ heisst **elementar**, falls es höchstens ein q-Simplex u gibt, so dass $c(u) \neq 0$. In diesem Fall schreiben wir $c = c(u) \cdot u$.

Also können wir $C_q(X; G)$ auch schreiben als

$$C_q(X; G) = \bigoplus_{u\colon \Delta^q \to X} G(u(b_0)).$$

Aus der graduierten abelschen Gruppe $C_*(X; G)$ erhalten wir wie folgt einen Kettenkomplex: Es genügt dafür, den Randoperator ∂ auf den elementaren Ketten zu definieren. Sei also $q \in \mathbf{N}, u\colon \Delta^q \longrightarrow X$ und $g \in G(u(b_0))$. Für alle $j \in \{0, \ldots, q\}$ bezeichnen wir mit $\partial_j u$ die j-te Seitenfläche von u. Sei σ_u die Homotopieklasse des Weges

$$t \longmapsto u((1-t) \cdot b_1 + t \cdot b_0),$$

der $u(b_1) = (\partial_0 u)(b_0)$ und $u(b_0)$ verbindet; also ist $G(\sigma_u)\colon G(u(b_0)) \longrightarrow G(\partial_0 u(b_0))$ ein Isomorphismus und wir können

$$\partial(g \cdot u) := G(\sigma_u)(g) \cdot \partial_0 u + \sum_{j=1}^{q} (-1)^j \cdot g \cdot \partial_j u$$

definieren. Dies ist wohldefiniert, da

$$\begin{aligned} &G(\sigma_u)(g) \in G(\partial_0 u(b_0)), \\ \forall_{j \in \{1,\dots,q\}} \quad &g \in G(u(b_0)) = G(\partial_j u(b_0)). \end{aligned}$$

Dass $\partial\partial(g \cdot u) = 0$ ist, folgt analog zur entsprechenden Rechnung in der singulären Theorie mit "konstanten" Koeffizienten. Also ist $\big(C_*(X;G), \partial\big)$ ein Kettenkomplex.

Definition. Zu $q \in \mathbf{N}$ heisst

$$H_q(X;G) := H_q(C_*(X;G))$$

q-te Homologiegruppe von X mit lokalen Koeffizienten in G.

Die Homologie mit lokalen Koeffizienten ist eine echte Verallgemeinerung der singulären Theorie, denn:

Bemerkung. Sei X wegzusammenhängend, G ein einfaches lokales Koeffizientensystem über X und $x_0 \in X$. Dann ist für alle $q \in \mathbf{N}$

$$H_q(X;G) \cong H_q(X;G(x_0)).$$

Beweis. Da das lokale Koeffizientensystem G einfach und X wegzusammenhängend ist, gibt es einen natürlichen Isomorphismus von G zum konstanten Bündel der Gruppe $G(x_0)$ über X. Dieser liefert einen Isomorphismus der Kettenkomplexe $C_*(X;G)$ und $S_*(X;G(x_0))$ (dem singulären Kettenkomplex). Also ist für alle $q \in \mathbf{N}$

$$H_q(X;G) \cong H_q(X;G(x_0)). \qquad \square$$

Ausserdem ist es möglich, relative Homologiegruppen mit lokalen Koeffizienten zu definieren (siehe [Wh, p. 267]).
Es stellt sich heraus, dass folgende Kategorie die geeignete Umgebung für Homologie mit lokalen Koeffizienten ist:

Definition. Sei $\mathcal{L}$ die Kategorie, deren

- Objekte Tripel $(X, A; G)$ sind, wobei (X, A) ein Raumpaar und G ein lokales Koeffizientensystem über X ist, und
- deren Morphismen Paare $(\Phi_1, \Phi_2)\colon (X, A; G) \longrightarrow (Y, B; H)$ sind, wobei $\Phi_1\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ stetig und $\Phi_2\colon G \longrightarrow \Phi_1^* H$ ein Homomorphismus von Gruppenbündeln ist.

- Die Verknüpfung zweier Morphismen $\Phi\colon (X,A;G) \longrightarrow (Y,B;H)$ und $\Psi\colon (Y,B;H) \longrightarrow (Z,C;K)$ ist dabei gegeben durch (mit $\Phi_1^*\Psi_2\colon \Phi_1^*H \longrightarrow \Phi_1^*\Psi_1^*K$)

$$(\Psi_1 \circ \Phi_1, (\Phi_1^*\Psi_2) \circ \Phi_2).$$

Auch in dieser Kategorie gibt es einen Homotopiebegriff, mit dem die Homologie mit lokalen Koeffizienten zu einer Homologietheorie wird, die das Analogon zu den Eilenberg-Steenrod-Axiomen erfüllt (siehe [Wh, p. 268f]).

2.2 Kohomologie mit lokalen Koeffizienten

Analog zum letzten Abschnitt können wir auch eine Kohomologietheorie mit lokalen Koeffizienten konstruieren: Sei X ein topologischer Raum und G ein System lokaler Koeffizienten über X.

Definition. Zu $n \in \mathbf{N}$ sei $C^n(X;G)$ die Menge aller Funktionen c, die jedem singulären Simplex $u\colon \Delta^n \longrightarrow X$ ein Element $c(u) \in G(u(b_0))$ zuordnen. Die Elemente von $C^n(X;G)$ heissen **singuläre q-Koketten mit Koeffizienten in G**.

Also können wir auch

$$C^n(X;G) = \prod_{u\colon \Delta^n \to X} G(u(b_0))$$

schreiben.
Den Korandoperator δ auf $C^*(X;G)$ definieren wir durch

$$\forall_{c\in C^n(X;G)} \quad \forall_{u\colon \Delta^{n+1}\to X} \quad (-1)^n\big(\delta c\big)(u) := G(\sigma_u)^{-1}c(\partial_0 u) + \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j c(\partial_j u).$$

Damit wird $C^*(X;G)$ zu einem Kokettenkomplex, der die **singuläre Kohomologie mit lokalen Koeffizienten** induziert.

2.3 Die (Ko)homologie mit lokalen Koeffizienten von CW-Komplexen

Ebenso wie in der singulären Theorie mit konstanten Koeffizienten gibt es auch hier eine Beschreibung der (Ko)Homologie von CW-Komplexen durch Zellenkomplexe (siehe [Wh, Kapitel VI 4]). Dabei sind die Ergebnisse völlig analog.

3 Das partielle Liftungsproblem

Im folgenden sei $p\colon X \longrightarrow B$ eine Faserung. Wir versuchen einen entsprechenden Schnitt zu finden und klassifizieren diese Schnitte bis auf vertikale Homotopie.

Definition. Dabei heisst eine Homotopie $f\colon I\times Y \longrightarrow X$ **vertikal**, wenn $p\circ f\colon I\times Y \longrightarrow B$ stationär ist. D.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \times Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & X \arrow[d, "p"] \\ \{0\} \times Y \arrow[r, "f_0"'] & B \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

3.1 Korrespondenzsatz

Offensichtlich ist das Schnittproblem ein Spezialfall des Liftungsproblems: Gibt es zu $f\colon Y \longrightarrow B$ eine Abbildung $h\colon Y \longrightarrow X$ mit $p \circ h = f$?
Andersherum können wir aber auch jedes Liftungsproblem auf das Schnittproblem zurückführen:

Satz. *Sei $f\colon Y \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung und $q\colon W \longrightarrow Y$ die durch f induzierte Faserung. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\{h\colon Y \to X | h \textit{ stetig und } p \circ h = f\} \longrightarrow \{k\colon Y \to W | k \textit{ stetig und } q \circ k = \mathrm{id}_Y\}.$$

Beweis. Sei $h\colon Y \longrightarrow X$ eine Liftung von f, d.h.

$$p \circ h = f = f \circ \mathrm{id}_Y\,.$$

Da $q\colon W \longrightarrow Y$ durch f induziert ist, haben wir ein Pullback-Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

Also gibt es genau eine Abbildung $k\colon Y \longrightarrow W$ mit $q \circ k = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ k = h$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "id_Y"'] & & \\ & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "p"] \\ & Y \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist k ein Schnitt von q.

Sei umgekehrt $k\colon Y \longrightarrow W$ ein Schnitt von q. Wegen

$$p \circ g \circ k = f \circ q \circ k = f \circ \mathrm{id}_Y = f$$

ist dann $g \circ k$ eine Liftung von f.
Dabei ist klar, dass die obigen Operationen zueinander invers sind. $\square$

Bemerkung. Analog lässt sich zeigen, dass zwei Liftungen genau dann vertikal homotop sind, wenn dies für die entsprechenden Schnitte zutrifft.

Das Finden einer vertikalen Homotopie von Liftungen entspricht einem relativen Schnittproblem. Daher betrachten wir relative Schnittprobleme:
Sei also im folgenden $p\colon X \longrightarrow B$ eine Faserung mit einem wegzusammenhängenden Raum B und wegzusammenhängender Faser F. Weiter sei (K, L) ein zusammenhängender relativer CW-Komplex mit Abbildungen $\Phi\colon K \longrightarrow B$ und $f\colon L \longrightarrow X$, so dass

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ K \arrow[r, "\Phi"] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition. In dieser Situation nennen wir f eine **partielle Liftung von Φ**.

Das **partielle Liftungsproblem** besteht nun darin, eine Abbildung $g\colon K \longrightarrow X$ zu finden, so dass

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ K \arrow[r, "\Phi"] \arrow[ur, "g"] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Ebenso wie in [IfO] gehen wir dieses Problem gerüstweise an. Allerdings liegen die Hindernisse nun in Kohomologiegruppen mit lokalen Koeffizienten.

3.2 Der erste Schritt

Analog zum Fortsetzungsproblem in [IfO] gilt auch hier der folgende Satz (allerdings ist der Beweis schon deutlich komplizierter ...)

Satz. *Ist $p\colon X \longrightarrow B$ eine Faserung mit wegzusammenhängendem Basisraum B und wegzusammenhängender Faser F, und ist (K, L) ein relativer zusammenhängender CW-Komplex mit einer Abbildung $\Phi\colon K \longrightarrow B$, so kann jede partielle Liftung $f\colon L \longrightarrow X$ von Φ fortgesetzt werden zu einer partiellen Liftung $g_1\colon K_1 \longrightarrow X$ auf dem Einsgerüst.*

Beweis. Die partielle Liftung $f\colon L \longrightarrow X$ kann zu einer partiellen Liftung $g_0\colon K_0 \longrightarrow X$ auf dem Nullgerüst fortgesetzt werden, denn: Da B wegzusammenhängend ist, ist $p\colon X \longrightarrow B$ surjektiv, d.h. zu jedem $x \in K_0$ gibt es einen Punkt $g_0(x) \in p^{-1}(\Phi(x)) \neq \emptyset$.
Sei E^1_α eine Einszelle von (K, L) mit charakteristischer Abbildung $h_\alpha\colon (\Delta^1, \partial\Delta^1) \longrightarrow (E^1_\alpha, \partial E^1_\alpha)$. Wir betrachten die Faserung $q_\alpha\colon W_\alpha \longrightarrow \Delta^1$, die durch $\Phi \circ h_\alpha$ induziert wird:

$$\begin{tikzcd}
W_\alpha \arrow[rr] \arrow[dd, "q_\alpha"'] & & K_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[dd, hook] & X \arrow[dd, "p"] \\
& \partial\Delta^1 \arrow[ur, "h_\alpha|_{\partial\Delta^1}"] \arrow[dl, hook'] & & \\
\Delta^1 \arrow[rr, "h_\alpha"'] & & K \arrow[r, "\Phi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Da Δ^1 zusammenziehbar ist, ist q_α faserhomotop zur trivialen Faserung. Nach Konstruktion besitzen p und die zurückgezogene Faserung q_α dieselbe Faser. Daher ist W_α homotopieäquivalent zu $\Delta^1 \times F$, und damit wegzusammenhängend (sowohl Δ^1 als auch F ist wegzusammenhängend).
Die partielle Liftung $g_0 \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^1}\colon \partial\Delta^1 \longrightarrow X$ von Φ liefert einen partiellen Schnitt von q_α. Da W_α wegzusammenhängend ist, gibt es also eine Fortsetzung $k_\alpha\colon \Delta^1 \longrightarrow W_\alpha$. Diese ist i.a. jedoch kein Schnitt.
Wegen $q_\alpha \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^1} = \mathrm{id}_{\partial\Delta^1}$ und da Δ^1 einfach zusammenhängend ist, gilt (relativ $\partial\Delta^1$)

$$q_\alpha \circ k_\alpha \simeq \mathrm{id}_{\Delta^1}\,.$$

Da $q_\alpha\colon W_\alpha \longrightarrow \Delta^1$ eine Faserung ist, erhalten wir mit der Homotopieliftungseigenschaft, dass k_α relativ $\partial\Delta^1$ homotop zu einem Schnitt $k'_\alpha\colon \Delta^1 \longrightarrow W_\alpha$ ist.
Also definiert k'_α eine Liftung $\ell_\alpha\colon \Delta^1 \longrightarrow X$ von $\Phi \circ h_\alpha$, die $g_0 \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^1}$ fortsetzt. Dann ist

$$f_\alpha := \ell_\alpha \circ h_\alpha^{-1}\colon E^1_\alpha \longrightarrow X$$

eine partielle Liftung, die $g_0|_{\partial E^1_\alpha}$ fortsetzt. Damit erhalten wir insgesamt (da die einzelnen Fortsetzungen "zusammenpassen") eine partielle Liftung $g_1\colon K_1 \longrightarrow X$, die g_0 fortsetzt. □

4 Hindernisse für partielle Liftungen

Sei nun $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, $g\colon K_n \longrightarrow X$ eine partielle Liftung, und die Faser F sei n-einfach, d.h. die Homotopiegruppen $(\pi_n(F_b))_{b\in B}$ bilden ein lokales Koeffizientensystem $\pi_n(\mathcal{F})$ (siehe 1.1).
Dann erhalten wir durch Zurückziehen ein lokales Koeffizientensystem $\Phi^*\pi_n(\mathcal{F})$ über K. Auch für dieses System schreiben wir $\pi_n(\mathcal{F})$.
Wir suchen eine geeignete Kohomologieklasse (diese wird in der Kohomologie mit lokalen Koeffizienten liegen), die etwas über die Fortsetzbarkeit der partiellen Liftung aussagt.

4.1 Lokale Beschreibung

Sei E_α^{n+1} eine $(n+1)$-Zelle von (K,L) mit charakteristischer Abbildung

$$h_\alpha\colon (\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}) \longrightarrow (E_\alpha^{n+1}, \partial E_\alpha^{n+1}).$$

Da (K,L) zusammenhängend ist (und $* \hookrightarrow \Delta^{n+1}$ eine Kofaserung ist), können wir oBdA annehmen, dass $h_\alpha(b_0) = *$ ist (wobei wir mit b_0 eine ausgezeichnete Ecke von Δ^{n+1} bezeichnen).
Die Abbildung $\Phi \circ h_\alpha$ induziert eine Faserung $q_\alpha\colon W_\alpha \longrightarrow \Delta^{n+1}$. Also liefert $g \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}$ einen partiellen Schnitt $k_\alpha\colon \partial\Delta^{n+1} \longrightarrow W_\alpha$ von q_α :

$$\begin{tikzcd}
W_\alpha \arrow[rr] \arrow[dd, "q_\alpha"'] & & K_n \arrow[r, "g"] \arrow[dd, hook] & X \arrow[dd, "p"] \\
& \partial\Delta^{n+1} \arrow[ul, "k_\alpha"] \arrow[ur, "h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}"] \arrow[dl, hook] & & \\
\Delta^{n+1} \arrow[rr, "h_\alpha"'] & & K \arrow[r, "\Phi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Da Δ^{n+1} zusammenziehbar ist, ist q_α faserhomotop zur trivialen Faserung. Also ist W_α homotopieäquivalent zur Faser $F_\alpha := q_\alpha^{-1}(b_0)$. Daher repräsentiert k_α ein Element $\bar{c}^{n+1}(g)(e_\alpha) \in \pi_n(F_\alpha)$, wobei wir mit e_α das zu E_α^{n+1} gehörige Basiselement im Zellenkomplex $\Gamma_{n+1}(K,L;\pi_n(\mathcal{F}))$ bezeichnen. Dadurch erhalten wir eine Kokette

$$\bar{c}^{n+1}(g) \in \Gamma^{n+1}(K,L;\pi_n(\mathcal{F})).$$

Definition. Dieses Element $\bar{c}^{n+1}(g)$ heisst **Hindernis zur Fortsetzung der partiellen Liftung** g (**mit lokalen Koeffizienten**).

4.2 Globale Beschreibung

Auch zum Hindernis mit lokalen Koeffizienten gibt es nicht nur eine "lokale", sondern auch eine "globale" Beschreibung. Dazu sei jedoch auf [Wh, p. 293 ff] verwiesen.

4.3 Grundlegende Eigenschaften

Analog zum "einfachen" Fall in [IfO] gilt hier:

Satz. *Das Hindernis $\bar{c}^{n+1}(g)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

- *Sei E_α^{n+1} eine $(n+1)$-Zelle von (K,L). Die Abbildung $g\colon K_n \longrightarrow X$ kann genau dann zu einer partiellen Liftung über $K_n \cup E_\alpha^{n+1}$ fortgesetzt werden, wenn $\bar{c}^{n+1}(g)(e_\alpha) = 0$ ist.*

- *Die Abbildung $g\colon K_n \longrightarrow X$ kann genau dann zu einer partiellen Liftung auf ganz K_{n+1} fortgesetzt werden, wenn $\bar{c}^{n+1}(g) = 0$ ist.*

- *Sind $g_0, g_1\colon K_n \longrightarrow X$ partielle Liftungen, die relativ L vertikal homotop sind, so ist*
$$\bar{c}^{n+1}(g_0) = \bar{c}^{n+1}(g_1).$$

- *Die Kokette $\bar{c}^{n+1}(g)$ ist ein Kozykel von (K, L) mit Koeffizienten im lokalen Koeffizientensystem $\Phi^*\pi_n(\mathcal{F})$.*

Beweis. Für die letzte Aussage benötigen wir die globale Definition. Daher beweisen wir hier nur die ersten drei Aussagen:
(1) Es besitze $g|_{\partial E_\alpha^{n+1}}$ eine Fortsetzung zu einer partiellen Liftung $g'\colon E_\alpha^{n+1} \longrightarrow X$, d.h. $g \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}$ hat die Fortsetzung $g' \circ h_\alpha\colon \Delta^{n+1} \longrightarrow X$:

$$\begin{tikzcd}
W_\alpha \arrow[dd, bend right=40, "q_\alpha"'] & & & \\
\partial\Delta^{n+1} \arrow[u, "k_\alpha"] \arrow[r, "h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}"] \arrow[d, hook] & \partial E_\alpha^{n+1} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & K_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\
\Delta^{n+1} \arrow[r, "h_\alpha"'] & E_\alpha^{n+1} \arrow[r, hook] \arrow[urr, dashed, "g'"] & K \arrow[r, "\Phi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Nach 3.1 besitzt also der partielle Schnitt k_α eine Fortsetzung $k'_\alpha\colon \Delta^{n+1} \longrightarrow W_\alpha$ (dass k'_α tatsächlich eine Fortsetzung von k_α ist, folgt aus der Eindeutigkeit in 3.1), d.h.

$$\bar{c}^{n+1}(g)(e_\alpha) = 0 \in \pi_n(F_\alpha).$$

Sei andersherum $\bar{c}^{n+1}(g)(e_\alpha) = 0$, d.h. k_α besitzt eine Fortsetzung $k'_\alpha\colon \Delta^{n+1} \longrightarrow W_\alpha$. Diese ist im allgemeinen jedoch kein Schnitt von q_α. Also erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Form (da q_α eine induzierte Faserung ist, haben wir auch eine Abbildung $W_\alpha \longrightarrow X$)

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{n+1} \arrow[r, "g'_\alpha"] \arrow[d, "d:=q_\alpha\circ k'_\alpha"'] & X \arrow[d, "p"] \\
\Delta^{n+1} \arrow[r, "\Phi\circ h_\alpha"'] & B
\end{tikzcd}$$

wobei
$$d|_{\partial\Delta^{n+1}} = \mathrm{id} \ \text{ und } \ g'_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}} = g \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}.$$

Also ist d (relativ $\partial\Delta^{n+1}$) homotop zur Identität $\mathrm{id}_{\Delta^{n+1}}$, und damit gilt (relativ $\partial\Delta^{n+1}$)

$$p \circ g'_\alpha = \Phi \circ h_\alpha \circ d \simeq \Phi \circ h_\alpha.$$

Mit der Homotopieliftungseigenschaft erhalten wir, dass g'_α relativ $\partial\Delta^{n+1}$ homotop ist zu einer Abbildung g''_α mit

$$p \circ g''_\alpha = \Phi \circ h_\alpha.$$

Dabei ist also $g''_\alpha\colon \Delta^{n+1} \longrightarrow X$ eine Fortsetzung von $g \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}$, d.h. $g''_\alpha \circ h_\alpha^{-1}$ ist eine Fortsetzung von $g|_{\partial E_\alpha^{n+1}}$ zu einer partiellen Liftung über E_α^{n+1}.
(2) Folgt direkt aus (1).
(3) Seien g_0 und g_1 vertikal homotop relativ L, d.h. für jede $(n+1)$-Zelle E_α^{n+1} sind auch die durch $g_0 \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}$ und $g_1 \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}$ induzierten Schnitte von $q_\alpha\colon W_\alpha \longrightarrow \Delta^{n+1}$ vertikal homotop. Insbesondere sind sie homotop, d.h.

$$\bar{c}^{n+1}(g_0)(e_\alpha) = \bar{c}^{n+1}(g_1)(e_\alpha).$$

Da die e_α eine Basis von $\Gamma_{n+1}(K, L; \pi_n(\mathcal{F}))$ bilden, stimmen also bereits die Abbildungen $\bar{c}^{n+1}(g_0)$ und $\bar{c}^{n+1}(g_1)$ überein. □

4.4 Die Differenzkokette

Wir betrachten nun vertikale Homotopien etwas genauer: Seien also $g_0, g_1\colon K_n \longrightarrow X$ partielle Liftungen von Φ und $g'\colon I \times K_{n-1} \longrightarrow X$ eine vertikale Homotopie relativ L von $g_0|_{K_{n-1}}$ und $g_1|_{K_{n-1}}$.
Sei $p_2\colon I \times K \longrightarrow K$ die Projektion auf den zweiten Faktor, d.h. die obigen Abbildungen liefern eine partielle Liftung $g\colon \partial I \times K_n \cup I \times K_{n-1} \longrightarrow X$ von $\Phi \circ p_2$:

$$\begin{tikzcd}
\partial I \times K_n \cup I \times K_{n-1} \arrow[rr, "g"] \arrow[d, hook] & & X \arrow[d, "p"] \\
I \times K \arrow[r, "p_2"'] & K \arrow[r, "\Phi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Völlig analog zu [IfO] definieren wir

Definition. Die Abbildung $\bar{d}^n(g) := \bar{d}^n(g_0, g', g_1) \in \Gamma^n(K, L; \pi_n(\mathcal{F}))$, die gegeben ist durch

$$e_\alpha \longmapsto \bar{d}^n(g)(e_\alpha) := (-1)^n \cdot \bar{c}^{n+1}(g)(i \times e_\alpha),$$

heisst **Differenzkokette von g_0 und g_1 bezüglich g' (mit lokalen Koeffizienten)**.

(Dabei bezeichnen wir mit i wieder die Einszelle des Komplexes von I, wobei $\partial i = 1 - 0$ ist).

Satz. *Die Differenzkokette besitzt die folgenden Eigenschaften:*

- *Die Abbildung $g'\colon I \times K_{n-1} \longrightarrow X$ kann genau dann zu einer vertikalen Homotopie $I \times K_n \longrightarrow X$ von g_0 und g_1 fortgesetzt werden, wenn $\bar{d}^n(g) = 0$ ist. (Dies gilt auch zellenweise).*

- *Es ist (was auch den Namen erklärt)*

$$\delta\bar{d}^n(g) = \bar{c}^{n+1}(g_1) - \bar{c}^{n+1}(g_0).$$

- *Ist $g_0\colon K_n \longrightarrow X$ eine partielle Liftung von $\Phi, g'\colon I \times K_{n-1} \longrightarrow X$ eine vertikale Homotopie von $g_0|_{K_{n-1}}$ und $f'\colon K_{n-1} \longrightarrow X$, und ausserdem ein Element $d \in \Gamma^n(K, L; \pi_n(\mathcal{F}))$ gegeben, so kann f' zu einer partiellen Liftung $g_1\colon K_n \longrightarrow X$ von Φ fortgesetzt werden, so dass*

$$\bar{d}^n(g_0, g', g_1) = d.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu den entsprechenden Aussagen in [IfO] bzw. über die Hinderniskokette mit lokalen Koeffizienten. □

Korollar. *Die Kokette $\bar{c}^{n+1}(g)$ ist genau dann ein Korand, wenn $g|_{K_{n-1}}$ zu einer partiellen Liftung $K_{n+1} \longrightarrow X$ von Φ fortgesetzt werden kann.*

Beweis. Sei $g_1\colon K_{n+1} \longrightarrow X$ eine Fortsetzung von $g|_{K_{n-1}}$, d.h. $\bar{c}^{n+1}(g_1) = 0$. Wir betrachten die Funktion $G\colon I \times K_{n-1} \cup \partial I \times K_n \longrightarrow X$, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \forall_{x\in K_n} \quad & G(0,x) := g_1(x) \text{ und } G(1,x) := g(x) \\ \forall_{x\in K_{n-1}} \quad \forall_{t\in I} \quad & G(t,x) := g(x) = g_1(x). \end{aligned}$$

Also ist (nach obigem Satz)

$$\begin{aligned} \delta\bar{d}^n(G) &= \bar{c}^{n+1}(g) - \bar{c}^{n+1}(g_1|_{K_n}) \\ &= \bar{c}^{n+1}(g), \end{aligned}$$

und damit $\bar{c}^{n+1}(g) \sim 0$.
Sei andersherum $\bar{c}^{n+1}(g) = \delta d$ für ein $d \in \Gamma^n(K, L; \pi_n(\mathcal{F}))$. Nach dem Satz können wir $g|_{K_{n-1}}$ zu einer partiellen Liftung $g_1\colon K_n \longrightarrow X$ von Φ fortsetzen, so dass

$$\bar{d}^n(g, g', g_1) = -d$$

ist. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{c}^{n+1}(g) &= \delta d \\ &= -\delta\bar{d}^n(g, g', g_1) \\ &= \bar{c}^{n+1}(g) - c^{n+1}(g_1), \end{aligned}$$

und damit $\bar{c}^{n+1}(g_1) = 0$. Daher können wir g_1 zu einer partiellen Liftung auf K_{n+1} fortsetzen. Wegen $g|_{K_{n-1}} = g_1|_{K_{n-1}}$ liefert dies aber die gewünschte Fortsetzung von $g|_{K_{n-1}}$ auf K_{n+1}. □

4.5 Zusammenhang mit den Hindernissen zur Fortsetzung einer Abbildung

Wie hängt dies Alles mit den Hindernissen aus [IfO] zusammen? Sei $p\colon X \longrightarrow B$ eine triviale Faserung, etwa $X := B \times F$ und

$$p\colon B \times F \longrightarrow B$$

die Projektion auf den ersten Faktor.

Bemerkung. In dieser Situation ist das lokale Koeffizientensystem $\pi_n(\mathcal{F})$ einfach. □

Also können wir $\pi_n(\mathcal{F})$ mit $\pi_n(F)$ identifizieren.

Satz. *Seien $\Phi\colon K \longrightarrow B$ und $\Psi\colon K_n \longrightarrow F$ Abbildungen. Dann gilt für $g := (\Phi, \Psi)$, dass*

$$\bar{c}^{n+1}(g) = c^{n+1}(\Psi) \in \Gamma^{n+1}(K, L; \pi_n(F)).$$

Beweis. Sei E_α^{n+1} eine $(n+1)$-Zelle von (K, L) mit charakteristischer Abbildung h_α. Die Projektion $\Delta^{n+1} \times F \longrightarrow F$ ist ein Homotopieinverses der Inklusion $F \hookrightarrow \Delta^{n+1} \times F$. Also ist $\bar{c}^{n+1}(g)(e_\alpha)$ das Element von $\pi_n(F)$, das durch $\Psi \circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}\colon \partial\Delta^{n+1} \longrightarrow F$ gegeben ist:

$$\begin{tikzcd}
F & & \\
\Delta^{n+1} \times F \arrow[u, two heads, "\simeq"'] \arrow[drr, bend left, "(\Phi\circ h_\alpha)\times\mathrm{id}"] \arrow[dd, bend right=60, "q_\alpha"'] & & \\
\partial\Delta^{n+1} \arrow[u, "(\mathrm{id},\Psi\circ h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}})"'] \arrow[r, "h_\alpha|_{\partial\Delta^{n+1}}"] \arrow[d, hook] & K_n \arrow[r, "g=(\Phi,\Psi)"] \arrow[d, hook] & B \times F \arrow[d, "p"] \\
\Delta^{n+1} \arrow[r, "h_\alpha"'] & K \arrow[r, "\Phi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Nach Definition von $c^{n+1}(\Psi)(e_\alpha)$ folgt damit

$$c^{n+1}(\Psi)(e_\alpha) = \bar{c}^{n+1}(g)(e_\alpha).$$ □

Eine analoge Aussage gilt auch für die Differenzkoketten.

5 Das primäre Hindernis einer Liftung

Im folgenden sei $p\colon X \longrightarrow B$ eine Faserung mit wegzusammenhängendem Basisraum. Weiter sei $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ und die Faser F von p sei $(n-1)$-zusammenhängend (im Fall $n = 1$ setzen wir ausserdem voraus, dass F auch 1-einfach ist – denn dann ist $\pi_1(F)$ abelsch).

Sei (K, L) ein zusammenhängender relativer CW-Komplex und $\Phi\colon K \longrightarrow B, f\colon L \longrightarrow X$ Abbildungen mit

$$p \circ f = \Phi|_L.$$

Dann erhalten wir:

Satz. *Die Abbildung f kann zu einer partiellen Liftung $g\colon K_n \longrightarrow X$ von Φ fortgesetzt werden. Sind g_0 und g_1 zwei solche partiellen Liftungen, so sind die Einschränkungen $g_0|_{K_{n-1}}$ und $g_1|_{K_{n-1}}$ vertikal homotop (relativ L).*

Beweis. Dies ist klar, da alle entscheidenden Homotopiegruppen (d.h. die Koeffizienten) verschwinden. □

Korollar. *Die Hinderniskozykel $\bar{c}^{n+1}(g)$ mit lokalen Koeffizienten der partiellen Liftungen $g\colon K_n \longrightarrow X$, die f fortsetzen, liegen alle in derselben Kohomologieklasse.*

Definition. Die dadurch definierte Kohomologieklasse $\bar{\gamma}^{n+1}(f) \in H^{n+1}(K, L; \Phi^*\pi_n(\mathcal{F}))$ heisst **primäres Hindernis zur Fortsetzung von** f (**mit lokalen Koeffizienten**). Ist $L = \emptyset$, so heisst $\bar{\gamma}^{n+1}(f)$ **primäres Hindernis zur Liftung von** Φ.

Beweis. (des Korollars). Seien $g_0, g_1\colon K_n \longrightarrow X$ partielle Liftungen von Φ, die f fortsetzen. Nach dem Satz existiert also eine vertikale Homotopie (relativ L) $g'\colon I \times K_{n-1} \longrightarrow X$ der Einschränkungen $g_0|_{K_{n-1}}$ und $g_1|_{K_{n-1}}$. Daher ist die Differenzkokette $\bar{d}^n(g_0, g', g_1)$ definiert und wir erhalten

$$\delta\bar{d}^n(g_0, g', g_1) = \bar{c}^{n+1}(g_0) - \bar{c}^{n+1}(g_1),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Im Spezialfall einer trivialen Faserung erhalten wir:

Satz. *Ist $p\colon B \times F \longrightarrow B$ eine triviale Faserung und $f\colon L \longrightarrow B \times F$ (gegeben durch $\Psi\colon L \longrightarrow F$) eine partielle Liftung von $\Phi\colon K \longrightarrow B$, so gilt*

$$\bar{\gamma}^{n+1}(f) = \gamma^{n+1}(\Psi) \in H^{n+1}(K, L; \pi_n(F)).$$

(Zur Definition von $\gamma^{n+1}(\Psi)$ siehe [Wh, p.236]). Aus den Eigenschaften des Hindernisses mit lokalen Koeffizienten folgt direkt:

Satz. *Das primäre Hindernis $\bar{\gamma}^{n+1}(f)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

- *Die Abbildung f kann genau dann zu einer partiellen Liftung auf K_{n+1} fortgesetzt werden, wenn $\bar{\gamma}^{n+1}(f) = 0$ ist.*
- *Ist $\Psi\colon (K', L') \longrightarrow (K, L)$ eine zelluläre Abbildung und $f\colon L \longrightarrow X$ eine partielle Liftung von $\Phi\colon K \longrightarrow B$, so ist $f \circ \Psi|_{L'}$ eine partielle Liftung von $\Phi \circ \Psi$ und*

$$\bar{\gamma}^{n+1}(f \circ \Psi|_{L'}) = \Psi^*\bar{\gamma}^{n+1}(f) \in H^{n+1}(K', L'; \Psi^*\Phi^*\pi_n(\mathcal{F})).$$

- *Sind $f_0, f_1\colon L \longrightarrow X$ partielle Liftungen von Φ, die vertikal homotop sind, so ist*

$$\bar{\gamma}^{n+1}(f_0) = \bar{\gamma}^{n+1}(f_1).$$

5.1 Die primäre Differenz

Seien $g_0, g_1 \colon K \longrightarrow X$ Liftungen von Φ, die auf L übereinstimmen, d.h. es gibt eine vertikale Homotopie $g' \colon I \times K_{n-1} \longrightarrow X$ (relativ L) von $g_0|_{K_{n-1}}$ und $g_1|_{K_{n-1}}$. Da $g'_0 = g_0|_{K_n}$ und $g'_1 = g_1|_{K_n}$ Fortsetzungen auf K besitzen, ist

$$\bar{c}^{n+1}(g'_0) = 0 \text{ und } \bar{c}^{n+1}(g'_1) = 0,$$

und damit

$$\begin{aligned}\delta \bar{d}^n(g'_0, g', g'_1) &= \bar{c}^{n+1}(g'_1) - \bar{c}^{n+1}(g'_0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Also ist $\bar{d}^n(g'_0, g', g'_1)$ ein Kozykel. Die Kohomologieklasse von $\bar{d}^n(g'_0, g', g'_1)$ hängt jedoch nicht von der Homotopie g' (sondern nur von g_0 und g_1) ab (siehe [Wh, p. 298]).

Definition. Die Kohomologieklasse $\bar{\delta}^n(g_0, g_1) \in H^n(K, L; \pi_n(\mathcal{F}))$ von $\bar{d}^n(g'_0, g', g'_1)$ heisst **primäre Differenz der Liftungen g_0 und g_1**.

5.2 Eigenschaften der primären Differenz

Die primäre Differenz hat insbesondere folgende nützliche Eigenschaft:

Satz. *Die Einschränkung $g_0|_{K_n}$ genau dann vertikal homotop (relativ L) zu $g_1|_{K_n}$, wenn $\bar{\delta}^n(g_0, g_1) = 0$ ist.*

6 Homotopieklassifikation

Als Folgerungen aus dem letzten Abschnitt erhalten wir (bei denselben Voraussetzungen):

Satz (Fortsetzungssatz). *Die Faser F sei für alle $q \in \{n+1, \dots, \dim(K, L) - 1\}$ q-einfach und*

$$\forall_{q \in \{n+1, \dots, \dim(K,L)-1\}} \quad H^{q+1}(K, L; \pi_q(\mathcal{F})) = 0.$$

Dann kann die partielle Liftung $f \colon L \to X$ von $\Phi \colon K \longrightarrow B$ genau dann zu einer Liftung $K \longrightarrow X$ fortgesetzt werden, wenn $\bar{\gamma}^{n+1}(f) = 0$ ist.

Satz (Homotopiesatz). *Die Faser F sei q-einfach für alle $q \in \{n+1, \dots, \dim(K, L)\}$ und*

$$\forall_{q \in \{n+1, \dots, \dim(K,L)\}} \quad H^{q}(K, L; \pi_q(\mathcal{F})) = 0.$$

Dann sind die partiellen Liftungen $f_0, f_1 \colon K \longrightarrow X$ von $\Phi \colon K \longrightarrow B$, die auf L übereinstimmen, genau dann (relativ L) vertikal homotop, wenn $\bar{\delta}^n(f_0, f_1) = 0$ ist.

Satz (Klassifikationssatz). *Es gelte:*

- *Für alle $q \in \{n+1, \dots, \dim(K, L)\}$ ist F q-einfach.*

- *Für alle* $q \in \{n+1, \ldots, \dim(K,L)\}$ *ist* $H^q(K,L;\pi_q(\mathcal{F})) = 0$.
- *Für alle* $q \in \{n+1, \ldots, \dim(K,L)-1\}$ *ist* $H^{q+1}(K,L;\pi_q(\mathcal{F})) = 0$.

Weiter sei $f_0 \colon K \longrightarrow X$ *eine Liftung von* $\Phi \colon K \longrightarrow B$. *Dann liefert*

$$f \longmapsto \bar{\delta}^n(f_0, f)$$

eine Bijektion zwischen der Menge der vertikalen Homotopieklassen (relativ L*) von Liftungen, die auf* L *mit* f_0 *übereinstimmen, und der Gruppe* $H^n(k,L;\pi_n(\mathcal{F}))$.

Sei nun Π eine abelsche Gruppe. Dann bezeichnen wir mit $K(\Pi,n)$ den Eilenberg-Mac Lane-Raum, dessen n-te Homotopiegruppe gerade Π ist.
Dann erhalten wir direkt aus den obigen Sätzen:

Korollar. *Sei* $F = K(\Pi,n)$ *oder* $\dim(K,L) \leq n+1$. *Dann kann eine partielle Liftung* $f \colon L \longrightarrow X$ *von* $\Phi \colon K \longrightarrow B$ *genau dann zu einer Liftung von* Φ *fortgesetzt werden, wenn* $\bar{\gamma}^{n+1}(f) = 0$ *ist.* □

Korollar. *Sei* $F = K(\Pi,n)$ *oder* $\dim(K,L) \leq n$. *Dann sind die Liftungen* f_0 *und* f_1 *von* Φ, *die auf* L *übereinstimmen, genau dann (relativ* L*) vertikal homotop, wenn* $\bar{\delta}^n(f_0, f_1) = 0$ *ist.* □

Korollar. *Sei* $F = K(\Pi,n)$ *oder* $\dim(K,L) \leq n$, *und* $\Phi \colon K \longrightarrow B$ *besitze eine Liftung* $K \longrightarrow X$. *Dann gibt es eine Bijektion zwischen den vertikalen Homotopieklassen (relativ* L*) von Liftungen von* Φ *und der Gruppe* $H^n(K,L;\pi_n(\mathcal{F}))$. □

7 Darstellung der primären Hindernisse durch eine charakteristische Klasse

Die obigen Ergebnisse sind natürlich erst dann brauchbar, wenn wir die primären Hindernisse mit lokalen Koeffizienten konkret ausrechnen können. Dies ist auch tatsächlich möglich:
Sei $p \colon X \longrightarrow B$ eine Faserung (mit wegzusammenhängendem Basisraum) mit einem Schnitt $f \colon B \longrightarrow X$. Dabei sei die Faser F (wie in den letzten Abschnitten) $(n-1)$-zusammenhängend (und 1-einfach, falls $n = 1$ ist). Ausserdem sei X ein CW-Komplex. (Man könnte die primären Hindernisse via CW-Approximation auch für allgemeine Räume definieren – siehe etwa [Wh, p. 299f]).
Dann sind $f \circ p \colon X \longrightarrow X$ und id_X Liftungen von p. Also können wir

$$\bar{\varepsilon}^n(f) := \bar{\delta}^n(id_X, f \circ p) \in H^n(X; p^*\pi_n(\mathcal{F}))$$

definieren. Sei $i \colon F \longrightarrow X$ die "Inklusion" der Faser. Da $p \circ i$ konstant ist, ist das über F induzierte lokale Koeffizientensystem $i^*p^*\pi_n(\mathcal{F})$ einfach, d.h. wir können es mit $\pi_n(F)$ identifizieren.

Satz. *Für* $i^*\colon H^n(X; p^*\pi_n(\mathcal{F})) \longrightarrow H^n(F; \pi_n(F))$ *gilt*

$$i^*(\bar{\varepsilon}^n(f)) = (-1)^n \iota^n(F).$$

Dabei bezeichnen wir mit $\iota^n(F)$ wieder das Urbild des Inversen des Hurewicz-Isomorphismus $\rho\colon \pi_n(F) \cong H_n(F)$ unter dem natürlichen Isomorphismus (siehe [Wh, p. 236])

$$\begin{aligned} H^n(F; \pi_n(F)) &\cong \mathrm{Hom}(H_n(F), \pi_n(F)) \\ \iota^n(F) &\longmapsto \rho^{-1}. \end{aligned}$$

Satz. *Seien* $f_0, f_1\colon B \longrightarrow X$ *Schnitte von* p*. Dann ist*

$$p^*\bar{\delta}^n(f_0, f_1) = \bar{\varepsilon}^n(f_1) - \bar{\varepsilon}^n(f_0).$$

Wie sieht dies bei der Fortsetzung von Schnitten aus? Im folgenden sei B ein CW-Komplex, $A \subset B$ ein Unterkomplex, $W := p^{-1}(A)$ und $p_0 := p|_W\colon W \longrightarrow A$, sowie $f\colon A \longrightarrow W$ ein partieller Schnitt. Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{n+1}(f) &\in H^{n+1}(B, A; \pi_n(\mathcal{F})) \\ \bar{\varepsilon}^n(f) &\in H^n(W; p_0^*\pi_n(\mathcal{F})). \end{aligned}$$

Satz. *In obiger Situation gilt*

$$p^*\bar{\gamma}^{n+1}(f) = \delta^*\bar{\varepsilon}^n(f) \in H^{n+1}(X, W; p^*\pi_n(\mathcal{F})).$$

Für die Beweise dieser Sätze siehe [Wh, p. 300f].

Korollar. *Insbesondere gilt für* $A = * \subset B$*, dass*

$$p^*\bar{\gamma}^{n+1}(f) = (-1)^n \delta^* \iota^n(F) \in H^{n+1}(X, F; p^*\pi_n(\mathcal{F})).$$

Bemerkung. Dabei ist $p^*\colon H^{n+1}(B, *; \pi_n(\mathcal{F})) \longrightarrow H^{n+1}(X, F; p^*\pi_n(\mathcal{F}))$ ein injektiver Homomorphismus, d.h. dieses Korollar charakterisiert das primäre Hindernis $\bar{\delta}^{n+1}(f)$ durch “bekannte” Operationen.

Beweis. (des Korollars) Wegen $A = *$ ist $W = F, p_0 = \mathrm{id}_F$, und damit

$$\bar{\varepsilon}^n(f) = (-1)^n \iota^n(F),$$

woraus mit dem Satz die Behauptung folgt. □

Literatur

[Wh] Whitehead, George W. *Elements of Homotopy Theory*, Springer. (vergriffen, keine Neuauflage).

[MS] Milnor; Stasheff *Characteristic Classses*, Princeton University Press (1974)

[IfO] Meyer Marcus; Strohm, Clara *Instructions for Obstructions*, `http://www.fmi.uni-konstanz.de/~strohm/mathematik_ms/obstructions.ps.gz`