Packen weniger kongruenter Kreise in ein Quadrat

Clara Strohm
strohm@math.uni-muenster.de
http://omega.sdf-eu.org/pack_prob/

27. November 2002

1 Problemstellung und Übersicht

Unser Packungsproblem hat die folgende Gestalt:

Problem. *Gegeben sei eine natürliche Zahl n. Ein Radius $r \in \mathbf{R}_{>0}$ heisst* **zulässig für** *n, wenn n Kreise vom Radius r so in ein Einheitsquadrat gelegt werden können, dass sie paarweise disjunktes Inneres besitzen. Gesucht ist dann der maximale für n zulässige Radius r_n.*

Existiert zu jedem $n \in \mathbf{N}$ ein solcher maximaler Radius? Eine einfache Abschätzung zeigt, dass das Supremum aller (bezüglich n) zulässigen Radien existiert. Es genügt also zu zeigen, dass dieses Supremum selbst wieder zulässig ist. Geometrisch ist dies jedoch zunächst nicht einsichtig. Wir werden diese Frage im nächsten Abschnitt (positiv) beantworten.
Bekannt (und bewiesen) ist r_n bis $n = 27$ und für vereinzelte Werte über 27. Jedoch verwenden bereits die Beweise ab ca. 12 grossen Computereinsatz (s. Abschnitt 6). Für grössere n wurden durch Computerberechnungen "gute" Packungen gefunden; für die allermeisten ist aber nicht bekannt, ob sie wirklich optimal sind – das Problem stellt sich als ausserordentlich hartnäckig heraus.

2 "Packen" ist äquivalent zu "Verteilen"

Wir betrachten nun das folgende Verteilungsproblem und zeigen, dass es zu obigem Packungsproblem äquivalent ist. In den Beweisen zur Optimalität erweist es sich häufig als nützlich, wenn beide Formulierungen zur Verfügung stehen.

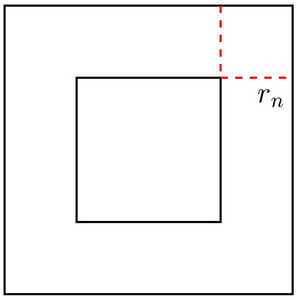
Problem. *Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \in \mathbf{N}_{>1}$. Ein Abstand $d \in \mathbf{R}_{>0}$ heisst* **zulässig für** *n, wenn n Punkte so in einem Einheitsquadrat verteilt werden können, dass der minimale paarweise Abstand dieser Punkte gerade d beträgt. Gesucht ist dann der maximale für n zulässige Abstand d_n.*

Das folgende Lemma zeigt, dass "Packen" und "Verteilen" äquivalent sind.

Lemma 1. *Für alle $n \in \mathbf{N}_{>1}$ ist*

$$r_n = \frac{d_n}{2d_n + 2} \text{ bzw. } d_n = \frac{2r_n}{1 - 2r_n}.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbf{N}_{>1}$. Aus der Skizze



erhalten wir

$$(1 - 2r_n) \cdot d_n = 2r_n,$$

und damit die Behauptung (da $r_n \neq 1/2$). □

Lemma 2. *Für jedes $n \in \mathbf{N}$ existiert ein maximaler für n zulässiger Abstand. Nach dem letzten Lemma existiert also insbesondere auch ein maximaler für n zulässiger Radius.*

Beweis. Offensichtlich ist die Existenz eines maximalen für n zulässigen Abstands äquivalent dazu, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon ([0,1]^2)^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)) &\longmapsto \min_{j,k \in \{1,\ldots,n\}, j \neq k} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \end{aligned}$$

ein globales Maximum besitzt. Da f (als Komposition stetiger Funktionen) stetig und $([0,1]^2)^n$ kompakt ist, ist auch das Bild unter f kompakt, d.h. f besitzt ein globales Maximum. □

3 Der Dirichletsche Schubfachschluss

Bei unserem Packungsproblem treten häufig Situationen auf, in denen eine einfache Beobachtung weiterhilft – der Schubfachschluss.

Lemma 3. (Dirichletscher Schubfachschluss). *Seien $n \in \mathbf{N}$, Mengen $M_1, \ldots, M_n$, sowie $(n+1)$ Elemente aus $\bigcup_{j\in\{1,\ldots n\}} M_j$ gegeben. Dann liegen in einer der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ mindestens zwei der gegebenen Elemente.*

Beweis. Angenommen, in jeder der n Mengen liegt höchstens eines der gegebenen Elemente. D.h. in der Vereinigung können höchstens n der gegebenen Elemente liegen, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

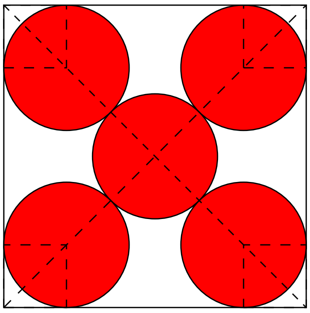
Fünf

Etwa erledigt sich der Fall $n = 5$ damit fast von selbst:

Satz. *Es ist*

$$r_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}+2} \text{ bzw. } d_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

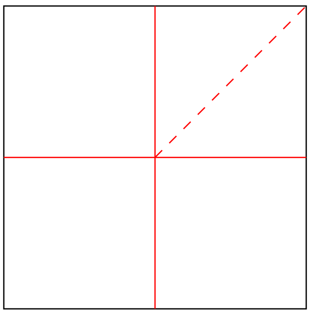
Beweis. Offensichtlich ist



eine zulässige Packung von 5 Kreisen. Dabei ist der Radius $1/(2\sqrt{2}+2)$, d.h.

$$r_5 \geq \frac{1}{2\sqrt{2}+2}.$$

Warum gilt auch "$\leq$"? Seien fünf Punkte im Einheitsquadrat gegeben. Unser Quadrat unterteilen wir nun wie folgt



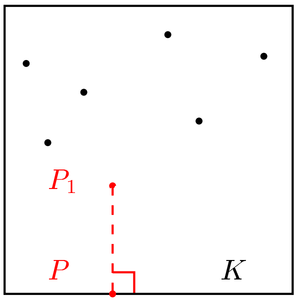
Nach dem Schubfachschluss liegen also in einem der kleinen Quadrate mindestens zwei Punkte. Diese haben maximal den Abstand $1/2\sqrt{2}$, woraus die Behauptung folgt. □

4 Aussenseiter/Randexistenzen

Manchmal ist es einfacher das Verteilungsproblem zu lösen, wenn wir annehmen können, dass es Punkte gibt, die auf dem Rand des Einheitsquadrates liegen.

Satz. *Seien $P_1, \ldots, P_n$ (verschiedene) Punkte im Einheitsquadrat mit minimalem paarweisem Abstand d. Dann ist es möglich, einen der Punkte auf eine vorgegebene Kante des Einheitsquadrates zu legen, ohne den minimalen paarweisen Abstand zu verkleinern.*

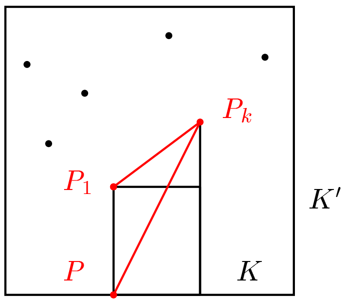
Beweis. Sei oBdA P_1 ein Punkt von $P_1, \ldots, P_n$, dessen Abstand zur gegebenen Kante K minimal ist. Dann ersetzen wir P_1 durch das Bild P unter der orthogonalen Projektion auf K :



Also erhalten wir (aufgrund der Minimalität) für die neuen Abstände

$$\begin{aligned}\forall_{k\in\{2,\ldots,n\}} \quad d(P,P_k) &= \sqrt{d(P_k,K)^2 + |d(P,K') - d(P_k,K')|^2} \\ &\geq \sqrt{|d(P_k,K) - d(P_1,K)|^2 + |d(P_1,K') - d(P_k,K')|^2} \\ &= d(P_1,P_k),\end{aligned}$$

wobei wir mit K' eine der Seiten des Quadrates bezeichnen, die senkrecht zu K ist.



Die paarweisen Abstände der $P_2, \ldots, P_n$ untereinander bleiben dabei natürlich erhalten. D.h. insgesamt folgt, dass sich der minimale Abstand nicht verkleinert hat. □

Drei

Korollar. *Sei $d \in \mathbf{R}_{>0}$ ein zulässiger Abstand für $n = 3$. Dann gibt es drei Punkte im Einheitsquadrat mit minimalem paarweisem Abstand $\geq d$, so dass einer der drei Punkte eine Ecke ist.*

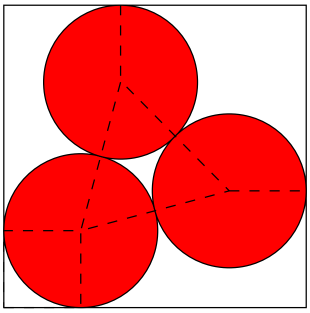
Beweis. Da d ein zulässiger Abstand ist, existieren drei Punkte im Einheitsquadrat, deren minimaler Abstand $\geq d$ ist. Wir wenden nun den obigen Satz nacheinander auf alle vier Seiten des Einheitsquadrates an. D.h. auf jeder der vier Seiten liegt mindestens einer der drei so konstruierten Punkte. Daher muss einer der Punkte auf zwei Seiten liegen, ist also eine Ecke. $\square$

Dieses Korollar ergibt zusammen mit einem Schubfachschluss den Beweis für $n = 3$:

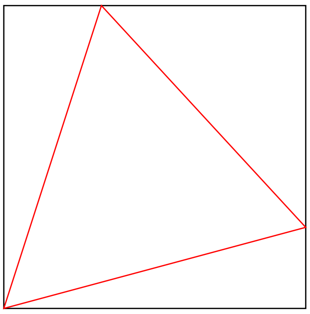
Satz. *Es ist*

$$r_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12} + 1} \quad \textit{bzw.} \quad d_3 = \sqrt{6} - \sqrt{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}}.$$

Beweis. Dass $r_3 \geq 1/2 \cdot 1/(\cos\frac{\pi}{12} + 1)$ ist, erhalten wir aus folgender Packung:



Warum ist $d_3 \leq \sqrt{6} - \sqrt{2}$? Nach obigem Korollar können wir oBdA annehmen, dass einer der drei Punkte eine Ecke ist. Mit der Unterteilung



und dem Schubfachprinzip erhalten wir also die Behauptung – die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks beträgt gerade

$$\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ bzw. } \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}}. \qquad \square$$

Vier

Zunächst leiten wir ein ähnliches Korollar ab wie im letzten Abschnitt:

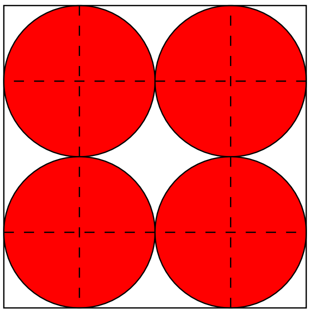
Korollar. *Sei $d \in \mathbf{R}_{>0}$ ein zulässiger Abstand für $n = 4$. Dann gibt es vier Punkte im Einheitsquadrat mit minimalem paarweisem Abstand $\geq d$, so dass einer der vier Punkte eine Ecke ist oder jeder der vier Punkte auf dem Rand liegt.*

Beweis. Da d ein zulässiger Abstand ist, existieren vier Punkte im Einheitsquadrat, deren minimaler Abstand $\geq d$ ist. Wir wenden nun den obigen Satz nacheinander auf alle vier Seiten des Einheitsquadrates an. D.h. auf jeder der vier Seiten liegt mindestens einer der vier so konstruierten Punkte.
Daher liegt einer der vier Punkte in einer Ecke, oder jeder der vier Punkte liegt auf dem Rand. □

Satz. *Es ist*

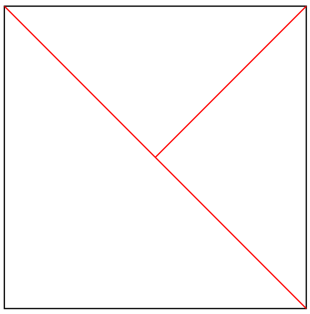
$$r_4 = 1/4 \textit{ bzw. } d_4 = 1.$$

Beweis. Offensichtlich ist $r_4 \geq 1/4$:



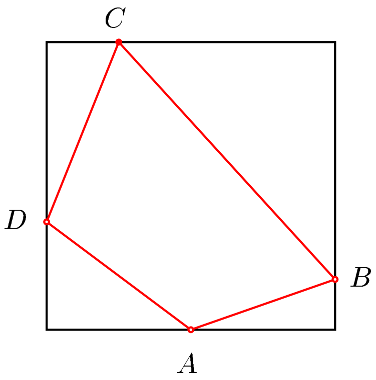
Seien nun vier Punkte im Einheitsquadrat gegeben. Nach dem letzten Korollar können wir oBdA annehmen, dass einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

① Einer der vier Punkte ist eine Ecke. Dann unterteilen wir das Quadrat folgendermassen



Mit dem Schubfachschluss erhalten wir also, dass ein weiterer Punkt im grossen Dreieck liegt oder, dass in einem der beiden kleinen Dreiecke zwei der vier Punkte liegen. Im ersten Fall ist der Abstand zur Ecke ≤ 1, im zweiten Fall ist der Abstand der beiden Punkte im kleinen Dreieck ≤ 1.

② Alle vier Punkte, etwa A, B, C, D, liegen auf dem Rand. Mit der Dreicksungleichung erhalten wir dann, dass der Umfang des Vierecks $ABCD$ kleiner gleich $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ ist:



Daher haben müssen zwei der vier Punkte einen Abstand ≤ 1 haben.

Also ist $d_4 \leq 1$. □

Im nächsten Abschnitt werden wir noch einen weiteren Beweis für $n = 4$ kennenlernen.

5 Rekursive Approximation

Intuitiv sollten sich die Quadratzahlen ganz besonders harmlos verhalten. Bis einschliesslich 36 erweist sich dies auch als richtig. Für 49 sind jedoch bereits Packungen bekannt, die besser sind als die "erwartete."

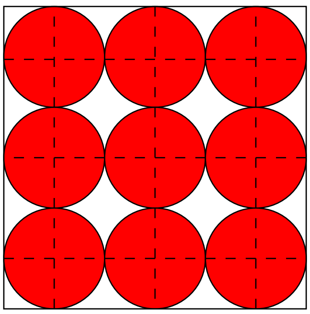
Neun

Der folgende Beweis ([Schaer]) für $n = 9$ funktioniert auch für $n = 4$, nicht aber für grössere Quadratzahlen.

Satz. *Es ist*

$$r_9 = 1/3 \textit{ bzw. } d_9 = 1/2.$$

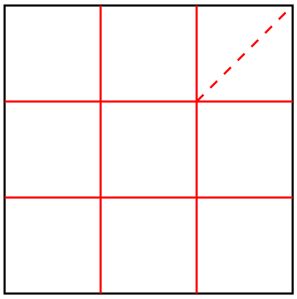
Beweis. Dass $r_9 \leq 1/3$ ist, ist offensichtlich:



Andererseits is $d_9 \leq 1/2$, denn: Sei $S = \{P_1, \ldots, P_9\} \subset [0,1]^2$ eine Menge von neun Punkten mit minimalem paarweisem Abstand $d \geq 1/2$.

Wir unterteilen das Einheitsquadrat in neun kongruente Quadrate $Q_1^{(0)}, \ldots Q_9^{(0)}$ mit Kantenlänge $s^{(0)} := 1/3$. D.h. zwei Punkte, die in einem dieser Quadrate liegen, haben höchstens den Abstand

$$\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}.$$

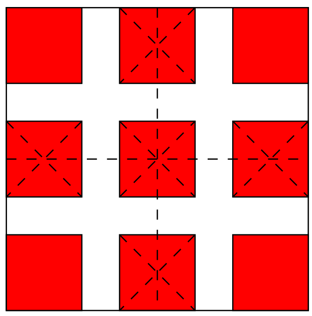


Also liegt in jedem der Quadrate genau einer der Punkte aus S. OBdA sei dabei $P_1 \in Q_1^{(0)}, \ldots, P_9 \in Q_9^{(0)}$.
Wir konstruieren nun induktiv eine Folge $(Q_1^{(j)}, \ldots, Q_9^{(j)})_{j \in \mathbf{N}}$ von Quadraten mit folgenden Eigenschaften: Für alle $j \in \mathbf{N}$ gilt

1. Es ist $P_1 \in Q_1^{(j)}, \ldots, P_9 \in Q_9^{(j)}$.

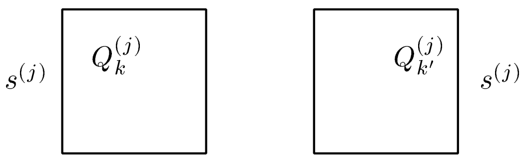
2. Die Quadrate $Q_1^{(j)}, \ldots, Q_9^{(j)}$ haben dieselbe Kantenlänge $s^{(j)}$.

3. Die Quadrate $Q_1^{(j)}, \ldots, Q_9^{(j)}$ haben folgende Lage im Einheitsquadrat:

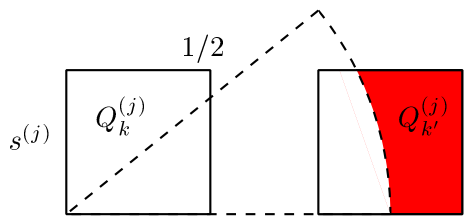


4. Es ist $Q_1^{(j+1)} \subset Q_1^{(j)}, \ldots, Q_9^{(j+1)} \subset Q_9^{(j)}$.

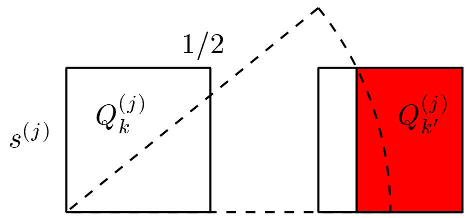
D.h. wir tasten uns rekursiv an die möglichen Positionen von $P_1, \ldots, P_9$ heran.
Sei also $j \in \mathbf{N}$ und $k, k' \in \{1, \ldots, 9\}$, so dass $Q_k^{(j)}$ und $Q_{k'}^{(j)}$ "benachbart" sind:



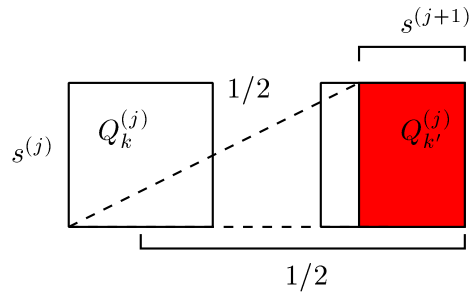
Wegen $d \geq 1/2$ müssen alle Punkte von $Q_{k'}^{(j)} \cap S$ im rot gefärbten Teil von $Q_{k'}^{(j)}$ liegen:



Insbesondere also auch in folgendem gefärbtem Rechteck:



D.h. $P_{k'}$ muss im verbleibenden Teil von $Q_{k'}$ liegen.
Da jedes der Quadrate $Q_1^{(j)}, \ldots, Q_9^{(j)}$ zu mindestens zwei weiteren benachbart ist, können wir die Positionen von $P_1, \ldots, P_9$ auf Quadrate $Q_1^{(j+1)}, \ldots, Q_9^{(j+1)}$ der Seitenlänge $s^{(j+1)}$ (s. Skizze) einschränken. Dabei können wir offensichtlich auch die Lagebedingung 3. erfüllen. Natürlich gilt dann auch 4.
Wir schätzen nun die neue Kantenlänge $s^{(j+1)}$ ab: Nach Konstruktion ist



$$\left(\frac{1}{2} + \frac{s^{(j)}}{2} - s^{(j+1)}\right)^2 + s^{(j)2} = \frac{1}{4},$$

und damit

$$\begin{aligned} s^{(j+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 + s^{(j)} - \sqrt{1 - 4s^{(j)2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(1+s^{(j)})^2 - (1 - 4s^{(j)2})}{1 + s^{(j)} + \sqrt{1-4s^{(j)2}}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2s^{(j)} + 5s^{(j)2}}{1 + s^{(j)} + \sqrt{1-4s^{(j)2}}}. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung erhalten wir, dass die oben konstruierten Quadrate klein genug werden:

Lemma 4. *Es gilt*

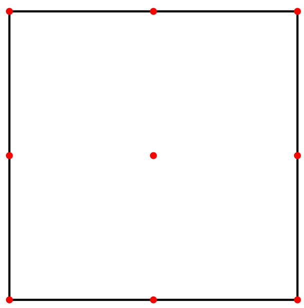
$$\lim_{j\to\infty} s^{(j)} = 0.$$

Beweis. Sei $j \in \mathbf{N}$ und oBdA $s^{(j)} \neq 0$. Dann ist (wegen $s^{(j)} \leq 1/3$)

$$\begin{aligned}
\frac{s^{(j+1)}}{s^{(j)}} &= \frac{1}{2}\frac{2+5s^{(j)}}{1+s^{(j)}+\sqrt{1-4{s^{(j)}}^2}} \\
&\leq \frac{2+2s^{(j)}+1}{2+2s^{(j)}+\sqrt{1-\frac{4}{9}}} \\
&= \frac{9+6s^{(j)}}{6+6s^{(j)}+2\sqrt{5}} \\
&\leq \frac{9+6s^{(j)}}{10+6s^{(j)}} \\
&= 1-\frac{1}{10+6s^{(j)}} \\
&\leq 1-\frac{1}{12},
\end{aligned}$$

woraus mit dem Quotientenkriterium die Behauptung folgt. □

Das Lemma liefert, dass die Schnitte $\bigcap_{j\in\mathbf{N}} Q_1^{(j)}, \ldots, \bigcap_{j\in\mathbf{N}} Q_9^{(j)}$ jeweils nur einen Punkt enthalten. Nach Konstruktion sind dies gerade die Punkte

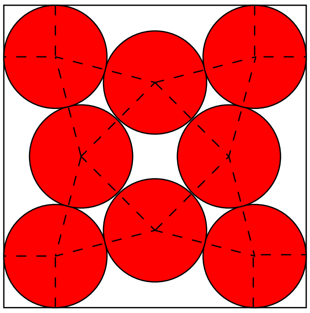


Insbesondere ist $d = 1/2$. □

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass dieses Argument auch für $n = 4$ funktioniert, nicht aber für Quadratzahlen, die grösser als 9 sind.

Acht

Ein ähnliches Prinzip wie die Approximation aus dem letzten Abschnitt liefert auch die Optimalität der folgenden Anordnung für $n = 8$:



Allerdings lässt sich hier die Approximation in endlich vielen Schritten durchlaufen, ist dafür aber komplizierter (die auftretenden Polygone sind komplexer – siehe etwa [Schaer, Meir]).

6 Und bei mehr Kreisen?

Wie eingangs erwähnt, ist es nur bei sehr wenigen Anzahlen möglich, die Optimalitätsbeweise “von Hand” zu führen. Das Problem liegt darin, dass auch bei nicht allzu grossen Anzahlen bereits viele Fallunterscheidungen nötig werden.
In Anlehnung an die Beweise für $n = 9$ bzw. $n = 8$ gibt es ein Verfahren (s. [Peikert]), das es ermöglicht – mit Computerhilfe – weitere Optimalitätsbeweise zu führen. Etwa wurden die Fälle $10, \ldots, 13, 15, 17, \ldots, 20$ auf diese Weise behandelt.

Definition. Sei $n \in \mathbf{N}$. Eine **Anordnung** von n Punkten mit Abstand d ist eine Menge von n Punkten im Einheitsquadrat mit minimalem paarweisem Abstand d. Eine **Packung** von n Punkten mit Abstand d ist eine Zusammenhangskomponente von Anordnungen (aufgefasst als Punkte in $([0,1]^2)^n$).

Sei $n \in \mathbf{N}$. Das Verfahren besteht aus folgenden Schritten:

① Eine gute untere Schranke d für d_n raten.

② (**Eliminationsprozedur**) Die Menge der Anordnungen von n Punkten im Einheitsquadrat mit minimalem Abstand mindestens d auf eine Menge von $2n$-dimensionalen Intervallen einschränken.

③ Eine optimale Lösung raten.

④ (**Verifikationsprozedur**) Beweisen, dass ausser der Packung aus ③ keine weiteren Packungen mit mindestens diesem Abstand existieren.

In den Schritten ② und ④ wird dabei ausgiebig von Computerunterstützung Gebrauch gemacht, um die auftretenden Fallunterscheidungen bzw. Iterationen in den Griff zu bekommen.

Literatur

[Peikert] Peikert, R. *Dichteste Packungen von gleichen Kreisen in einem Quadrat*, El. Math. 49 (1994), pp. 16 – 26

[Schaer] Schaer, J. *The densest packing of nine circles in a square*, Canad. Math. Bull. 8, pp. 273 – 277, 1965

[Schaer, Meir] Schaer, J. Meir, A. *On a geometric extremum problem*, Canad. Math. Bull. 8, pp. 21 – 27, 1965